Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 **Sommersemester 2017**
http://www.algebra.uni-linz.ac.at/teaching/ss2017/linalg/

Übungsblatt 10

Besprechung am **12. Juni 2017**

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass der LLL-Algorithmus als Erweiterung des erweiterten euklidischen Algorithmus betrachtet werden kann. Seien dazu $u, v \in \mathbb{Z}$ und $g = \gcd(u, v)$.

a) Sei $w \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und G das von $(wu, 1, 0)$ und $(wv, 0, 1)$ erzeugte Gitter. Zeigen Sie, dass für jedes $(x, y, z) \in G$ gilt, dass $wg \mid x$. Welche Beziehung gilt zwischen x, y und z?

b) Zeigen Sie, dass es $s, t \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $(wg, s, t) \in G$.

c) Sei B eine reduzierte Basis und $(\alpha wg, y, z) \in B$, mit $\alpha, y, z \in \mathbb{Z}$, sodass $\alpha^2 \geq 4$. Wie groß kann dann w sein?

d) Zeigen Sie dann, dass es $(x, y, z) \in B$ gibt, sodass $x = wg$ oder $x = -wg$, falls w ausreichend groß gewählt wird. Finden Sie eine passende Abschätzung für w in Abhängigkeit von u und v.

e) Folgern Sie daraus, dass der LLL-Algorithmus verwendet werden kann, um g sowie Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ zu finden, sodass $g = su + tv$.

Aufgabe 2 Dunklen Quellen zufolge geht das Gerücht um, dass die Europäische Zentralbank zunächst vorhatte, Euromünzen im Wert von 1, 3, 17, 75, 98, 111, 234 Cent statt des letztlich gewählten Schemas mit Münzen im Wert von 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 Cent einzuführen. Nehmen Sie an, sie wollten 9.99 Euro mit dem ursprünglich angedachten Schema bezahlen. Finden Sie eine Möglichkeit, diesen Betrag mit möglichst wenig Münzen auszudrücken.

Aufgabe 3 Gegeben sei das von den Vektoren $(15, -6, 2)$, $(10, -9, 0)$ und $(25, -10, 4)$ aufgespannte Gitter. Versuchen Sie, durch geeignet erscheinende Umformungen eine reduzierte Basis zu finden. Begründen Sie warum Ihre Basis tatsächlich reduziert ist. Ist das Ergebnis eindeutig bestimmt?

Aufgabe 4 a) Runden Sie 0.32075471698 zu einer rationalen Zahl.

b) Die Lösung einer kubischen Gleichung $f(x) = 0$ hat den numerischen Näherungswert -0.78324342. Hat f weitere reelle Nullstellen? Wo vermuten Sie den Wendepunkt von f?

c) Inwiefern lassen sich die mittels LLL-Algorithmus gefunden Lösungen dieser Aufgabe als korrekt erachten? Welche Voraussetzungen werden dabei stillschweigend angenommen?

Aufgabe 5 a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion, sodass die Berechnung von $f(n)$ eine Komplexität von $O(n \log n)$ hat. Welche Komplexität hat dann die Berechnung von $F(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)$?

b) Seien $a, b, c, d : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Es gelte $a(n) = O(b(n))$ und $c(n) = O(d(n))$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

- $a(n) + c(n) = O(b(n) + d(n))$
- $a(n) \cdot c(n) = O(b(n) \cdot d(n))$
- Wenn $b(n) = d(n)$, dann gilt $a(n) = O(c(n))$ oder $c(n) = O(a(n))$.