# Übungsblatt 1

Besprechung am **13. März 2017**

---

**Aufgabe 1** (Matrizen) Sei $A$ die folgende Matrix über $\mathbb{Q}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & -12 & 38 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 12 & -34 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 3 & 50 \\ 0 & 5 & 15 & 1 & 2 & 32 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis für den Zeilenraum, den Spaltenraum, den Kern und den Ko-Kern von $A$.

b) Bestimmen Sie den Rang von $A$ und von $A^\top$.

**Aufgabe 2** (Lineare Abbildungen) Sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ die lineare Abbildung, die durch

$$h(x) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \\ 12 & 8 & -3 \\ 15 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x \text{ für } x \in \mathbb{R}^3$$

gegeben ist.

a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis für den Kern und das Bild von $h$.

b) Bestimmen Sie, ob $h$ injektiv, surjektiv, oder bijektiv ist.

**Aufgabe 3** Sei $h$ die lineare Abbildung, die jeden Punkt an der Ebene $e : x + 2\,y + 2\,z = 0$ spiegelt.

a) Berechnen Sie $h(v)$ für $v \in \{(1, 2, 2)\,, (-2, 0, 1)\,, (2, -5, 4)\}$.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $h$ bezüglich folgender Basis.

$$B = ((1, 2, 2)\,, (-2, 0, 1)\,, (2, -5, 4)).$$

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $R$ dieser Spiegelung bezüglich der kanonischen Basis, und bestimmen Sie $R \cdot R$.

**Aufgabe 4** (Rang und Dimension) Finden Sie, wenn möglich, jeweils $3 \times 3$-Matrizen $A$ und $B$ über $\mathbb{Q}$, sodass:

a) $\operatorname{Rang}(A) = 3$, $\operatorname{Rang}(B) = 3$, $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 3$.

b) $\operatorname{Rang}(A) = 3$, $\operatorname{Rang}(B) = 2$, $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 1$.

c) $\operatorname{Rang}(A) = 2$, $\operatorname{Rang}(B) = 2$, $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 0$.

d) $\operatorname{Rang}(A) = 2$, $\operatorname{Rang}(B) = 1$, $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 0$.

e) $\operatorname{Rang}(A) = 2$, $\operatorname{Rang}(B) = 1$, $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 1$.

f) $\operatorname{Rang}(A) = 1$, $\operatorname{Rang}(B) = 3$, $\operatorname{Rang}(A \cdot B) = 2$.

Für einige Punkte gibt es keine solchen Matrizen $A$ und $B$. Begründen Sie das.

**Aufgabe 5** Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $p = X^6 + 3X^4 + X^2 + 3$ und $q = X^5 + 3X^3 - X^2 - 3$ in $\mathbb{R}[X]$, und bestimmen Sie Polynome $u, v \in \mathbb{R}[X]$, sodass $\gcd(p, q) = u\,p + v\,q$.