Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 · Sommer 2017 · **Mini-Test 9** 29.05.2017

Name (deutlich lesbar!) k Matrikelnummer

Aufgabe 1. Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Z}$-Modul und $\mathbb{Q}$ als Untermodul von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\mathrm{Tor}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Lösung. "$\subseteq$" Sei $x \in \mathrm{Tor}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, etwa $x = [\bar{x}]_\sim$ für ein $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $qx = [0]_\sim = \mathbb{Z}$, also ist $p := q\bar{x} \in \mathbb{Z}$, also $\bar{x} = p/q$, also $x = [p/q]_\sim \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

"$\supseteq$" Sei $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, etwa $x = [p/q]_\sim$ für ein $p/q \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $qx = [p]_\sim = [0]_\sim$, also $x \in \mathrm{Tor}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Hermite-Normalform von $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Lösung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle -2 \quad -3} \\ {\scriptstyle +} \\ {\scriptstyle +} \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle +} \\ {\scriptstyle -2} \mid \cdot (-1) \\ {\scriptstyle +} \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$