k

Name (deutlich lesbar!) Matrikelnummer

Aufgabe 1. Zeigen Sie: $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3 = \{0\}$.

Lösung. Jedes $x \in \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3$ ist eine Linearkombination von Tensoren $u \otimes v$ mit $u \in \mathbb{Z}_2$ und $v \in \mathbb{Z}_3$. Für jedes Paar $(u, v) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ gilt jedoch $u \otimes v = (3-2)(u \otimes v) = 3(u \otimes v) - 2(u \otimes v) = (u \otimes (3v)) - ((2u) \otimes v) = (u \otimes 0) - (0 \otimes v) = 0 - 0 = 0$. Darum kann auch x nur 0 sein.

Aufgabe 2. Der Basisergänzungssatz gilt nicht für freie Moduln: Zeigen Sie, dass der freie Modul $\mathbb{Z}^2$ keine Basis B mit $\{\binom{2}{0}\} \subseteq B$ hat (obwohl $\{\binom{2}{0}\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ linear unabhängig ist).

Lösung. Wäre B eine Basis mit $\binom{2}{0} \in B$, dann gäbe es eine Darstellung $\binom{1}{0} = a_0\binom{2}{0} + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ für gewisse $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ und $b_1, \ldots, b_n \in B$. Dann gilt $(2a_0 - 1)\binom{2}{0} + 2a_1 b_1 + \cdots + 2a_n b_n = 0$, und dies ist eine nicht-triviale lineare Abhängigkeit von B, denn zumindest gilt $2a_0 - 1 \neq 0$ für alle $a_0 \in \mathbb{Z}$.