Name (deutlich lesbar!)

k

Matrikelnummer

Aufgabe 1. Wie lauten die Abbildungsmatrizen der beiden Drehungen um 60° mit $\langle(1,0,0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ als Drehachse? (Gemeint sind die Drehung im Uhrzeigersinn und die Drehung in die umgekehrte Richtung; die Abbildungsmatrizen sind bezüglich der Standardbasis anzugeben.)

Lösung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(60^\circ) & \sin(60^\circ) \\ 0 & -\sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) \\ 0 & \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Für je zwei invertierbare Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.

Lösung. Wähle einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||x|| = 1$ und $||AB|| = ||ABx||$. Ein solcher existiert nach Definition der Matrixnorm. Dann gilt $||AB|| = ||ABx|| = ||A\frac{||Bx||}{||Bx||}Bx|| = ||A\frac{Bx}{||Bx||}|| \cdot ||Bx|| \leq ||A|| \cdot ||B||$, denn aus $||x|| = 1$ folgt $||Bx|| \leq ||B||$ und aus $||\frac{Bx}{||Bx||}|| = 1$ folgt $||A\frac{Bx}{||Bx||}|| \leq ||A||$.

Die angenommene Invertierbarkeit von B gewährleistet, dass der Nenner $||Bx||$ nicht Null ist.