Name (deutlich lesbar!) k Matrikelnummer

Aufgabe 1. Berechnen Sie eine ONB von $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

Lösung. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|u_1\| = 4 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} | \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{6}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|u_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{25+1+9+1} = \frac{6}{2} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eine ONB ist also $\left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Aufgabe 2. Der Raum $V = C([0,1], \mathbb{R})$ sei ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Weiter sei $H\colon V \to V$, $H(f)(t) = f(1-t)$. Ist H selbstadjungiert? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

Lösung. Für alle $f, g \in V$ gilt $\langle H(f)|g \rangle = \int_0^1 f(1-t)g(t)dt = -\int_1^0 f(u)g(1-u)du = \int_0^1 f(u)g(1-u)du = \langle f|H(g) \rangle$. Dabei wurde im zweiten Schritt die Substitution „$t = 1-u$; $dt = -du$" angewendet. Die Rechnung zeigt, dass H selbstadjungiert ist.