Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 · Sommer 2017 · **Mini-Test 5** 24.04.2017

Name (deutlich lesbar!) k Matrikelnummer

Aufgabe 1. Bestimmen Sie eine Basis von $\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \rangle^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^3$ (bzgl. des Standardskalarprodukts).

Lösung. Gesucht sind alle x mit $x \perp \alpha \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, also $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} x = 0$. Diese findet man durch Lösen eines linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \begin{array}{l} -4 \\ + \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\end{pmatrix} \begin{array}{l} \qquad\qquad + \\ \mid :(-3) \quad -1 \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \rangle^{\perp} = \langle \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} \rangle.$$

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie: dann ist auch A^{-1} symmetrisch und positiv definit.

Lösung. Symmetrisch: $(A^{-1})^{\top} = (A^{\top})^{-1} = A^{-1}$.

Positiv definit: Sei λ ein Eigenwert von A^{-1}, etwa zum Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann ist $\lambda \neq 0$, weil A^{-1} invertierbar ist. Ferner gilt $A^{-1}v = \lambda v$, also $\lambda^{-1}v = Av$, also ist λ^{-1} ein Eigenwert von A. Da A nach Annahme positiv definit ist, folgt $\lambda^{-1} > 0$, also $\lambda > 0$. Da λ beliebig war, folgt, dass A^{-1} nur positive Eigenwerte hat. Damit ist A^{-1} positiv definit.