Name (deutlich lesbar!)	k	Matrikelnummer

Aufgabe 1. Geben Sie das charakteristische Polynom, das Minimalpolynom, sowie die Dimensionen der Eigenräume der folgenden Matrix an:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{12\times 12}.$$

Lösung. charakteristisches Polynom: $\chi = (X-3)^4(X-2)^4(X-5)^4$
Minimalpolynom: $m = (X-3)^4(X-2)^2(X-5)^3$
$\dim E_3 = 1$, $\dim E_2 = 2$, $\dim E_5 = 3$.

Aufgabe 2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $h\colon V \to V$ ein Endomorphismus, und sei $s \in \mathbb{N}$ so, dass $\ker h^s = \ker h^{s+1}$. Zeigen Sie: Dann gilt $\ker h^n = \ker h^s$ für alle $n \geq s$.

Lösung. „$\supseteq$“ Ist $x \in \ker h^s$, so gilt $h^s(x) = 0$, also $h^{n-s}(h^s(x)) = 0$, also $h^n(x) = 0$, also $x \in \ker h^n$. (Für diese Richtung genügt auch der Verweis auf Satz 90.)

„$\subseteq$“ Induktion nach n. Für $n = s+1$ ist die Behauptung nach Annahme gegeben. Angenommen, sie stimmt für ein gewisses n. Wir zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ stimmt. Dazu sei $x \in \ker h^{n+1}$ beliebig. Dann gilt $h^{n+1}(x) = 0$, also $h^n(h(x)) = 0$, also $h(x) \in \ker h^n$, also (nach Induktionsvoraussetzung) $h(x) \in \ker h^s$, also $h^s(h(x)) = 0$, also $h^{s+1}(x) = 0$, also $x \in \ker h^{s+1} = \ker h^s$.