Name (deutlich lesbar!)

k

Matrikelnummer

Aufgabe 1. Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A \sim B$. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von A ist, dann ist λ auch Eigenwert von B. (Es wird nicht vorausgesetzt, dass A und B diagonalisierbar sind.)

Lösung. Stimmt, denn $A \sim B$ heißt $A = T^{-1}BT$ für eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so gilt $Av = \lambda v$. Dann gilt $T^{-1}BTv = \lambda v$, also $B(Tv) = \lambda(Tv)$, also ist Tv Eigenvektor von B zum Eigenwert λ.

Aufgabe 2. Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $A \not\sim B$ an, die beide $(X-1)(X-2)$ als Minimalpolynom haben.

Lösung. Zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.