k

Name (deutlich lesbar!) Matrikelnummer

Aufgabe 1. Einer der Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ ist 1.

a) Berechnen Sie eine Basis des Eigenraums E_1.

b) Berechnen Sie die weiteren Eigenwerte von A.

Lösung.

a)

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow E_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

b) Charakteristisches Polynom:

$$\chi = \det(A - XI_4) = \begin{vmatrix} -2-X & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1-X & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4-X & -3 \\ -3 & 0 & 3 & -2-X \end{vmatrix}$$

$$= (-1-X) \begin{vmatrix} -2-X & 3 & -3 \\ -3 & 4-X & -3 \\ -3 & 3 & -2-X \end{vmatrix}$$

$$= (-1-X)((-2-X)(4-X)(-2-X) + 27 + 27 - 9(4-X) + 9(-2-X) + 9(-2-X))$$

$$= (-1-X)((4-X)(2+X)^2 - 9(4-X) + 9(1-X) + 9(1-X))$$

$$= (-1-X)((4-X)(2+X)^2 - 9(2+X))$$

$$= (-1-X)(2+X)((4-X)(2+X) - 9)$$

$$= (-1-X)(2+X)(-X^2 + 2X + 8 - 9)$$

$$= (-1-X)(X+2)(-(X-1)^2)$$

$$= (X-1)^2(X+2)(X+1).$$

Die Eigenwerte sind also 1 (doppelt), -2 (einfach) und -1 (einfach).

Wie man an diesem Beispiel sieht, kann es zweckmäßig sein, einen faktorisierten Teilausdruck nicht zu früh ausmultiplizieren, sondern abzuwarten, ob sich gemeinsame Faktoren ergeben, die man vor dem Ausmultiplizieren herausheben kann. Mit etwas Gück kann man so die Nullstellenbestimmung eines höhergradigen Polynoms vermeiden.

Im vorliegenden Fall kommt man notfalls auch zum Ziel, wenn man das nicht sieht. Hat man nämlich das charakteristische Polynom zu $X^4 + X^3 - 3X^2 - X + 2$ berechnet, kann man verwenden, dass 1 als Eigenwert bekannt ist und nach dem Ergebnis von Teil a) mindestens ein doppelter Eigenwert sein muss. Also muss $X^4 + X^3 - 3X^2 - X + 2$ ein Vielfaches von $(X-1)^2$ sein, und Polynomendivision führt auf $X^4 + X^3 - 3X^2 - X + 2 = (X-1)^2(X^2 + 3X + 2)$, so dass auch in diesem Fall nur ein quadratisches Polynom zu faktorisieren bleibt.

Aufgabe 2. Konstruieren Sie eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ mit den Eigenwerten -1 und 2 und den Eigenräumen $E_{-1} = \langle \binom{1}{0} \rangle$ und $E_2 = \langle \binom{1}{1} \rangle$.

Lösung.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$