Lineare Algebra und Analytische Geometrie II · Sommer 2017 26.09.2017

Zweite Klausur

Name (deutlich lesbar!)	k	Matrikelnummer

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten leeren Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
$X-1$ ist ein gemeinsamer Teiler von $3X^2-2X-1$ und X^2+3X-2	☐	☐
Es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, die keinen Eigenwert hat	☐	☐
Jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert der Abbildung $D\colon C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $D(f)=f'$	☐	☐
Wenn $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar ist, dann hat A keine mehrfachen Eigenwerte	☐	☐
Jede symmetrische Matrix hat eine ONB aus Eigenvektoren	☐	☐
Zu jedem Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[X]$ gibt es eine passende ONB	☐	☐
$\mathbb{Z}^6 \times \mathbb{Z}_6$ ist als $\mathbb{Z}$-Modul torsionsfrei	☐	☐
Ist σ ein Singulärwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $-\sigma$ ein Singulärwert von $-A$	☐	☐
Jeder Singulärwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist auch ein Singulärwert von $A^\top$	☐	☐
Die Berechnung von Av für gegebene $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{K}^n$ kostet $\mathrm{O}(n^2)$ Operationen	☐	☐
Eine Matrix ist gut konditioniert, wenn ihre Konditionszahl groß ist	☐	☐
Ein Polynom vom Grad n ist eindeutig bestimmt durch seine Werte an n Stellen	☐	☐

Lösung. wahr-falsch-wahr, falsch-wahr-wahr, falsch-falsch-wahr, wahr-falsch-falsch

Aufgabe 2.

a) Konstruieren Sie eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit den Eigenräumen $E_1 = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$ und $E_{-1} = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \rangle$.

b) Wie lautet das Minimalpolynom der Matrix A aus Teil a), und warum?

c) Eine Matrix M hat das charakteristische Polynom $(X-2)^7$ und das Minimalpolynom $(X-2)^4$. Der Eigenraum zum Eigenwert 2 hat die Dimension 3. Wie lautet die Jordannormalform von M, und warum?

Lösung.

a) Bezüglich der Basis $B = \{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \}$ hat die gesuchte Abbildung die Abbildungsmatrix $\operatorname{diag}(1,-1,-1)$. Wir können deshalb

$$A = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-1&4&-2\\0&3&-2\\0&4&-3\end{pmatrix}$$

wählen.

Berechnung der Inversen:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&0&2&0&0&1\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&-1&2&-1&0&1\end{pmatrix} \mid \cdot(-1)$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&-1&1&-1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0&2&-1\\0&1&0&1&-2&1\\0&0&1&0&-1&1\end{pmatrix}$$

b) $(X-1)(X+1)$. Nach Konstruktion (und wegen $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 3$) ist die Matrix diagonalisierbar. Deshalb haben alle Faktoren des Minimalpolynoms die Vielfachheit 1.

c) Es gibt drei Kästchen (Dimension des Eigenraums), darunter mindestens eines der Größe vier (Grad des Minimalpolynoms). Die Gesamtlänge aller Kästchen ist sieben (Grad des charakteristischen Polynoms). Die einzige Möglichkeit ist deshalb

$$J = \begin{pmatrix}2&1&&&&&\\&2&1&&&&\\&&2&1&&&\\&&&2&&&\\&&&&2&1&\\&&&&&2&\\&&&&&&2\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\langle\cdot|\cdot\rangle\colon V\times V \to \mathbb{R}$ definiert durch $\langle A|B\rangle = \operatorname{Tr}(AB^\top)$. Hierbei bezeichnet $\operatorname{Tr}(M)$ die Summe der Diagonalelemente der Matrix M.

a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist.

b) Berechnen Sie eine Basis von $\{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\}^\perp$.

c) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ auf $\langle\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\rangle$.

Lösung.

a) (i) Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt $\langle A|A\rangle = \mathrm{Tr}(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}) = a^2+b^2+c^2+d^2$. Daraus folgt $\langle A|A\rangle \geq 0$ für alle $A \in V$ und $\langle A|A\rangle = 0 \iff A = 0$. (ii) Symmetrie folgt aus $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M^\top)$ und $AB^\top = (BA^\top)^\top$ für alle $A, B, M \in V$. (iii) Linearität folgt aus der Linearität der Matrixmultiplikation.

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ liegt genau dann im orthogonalen Komplement von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ wenn gilt

$$\mathrm{Tr}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}) = \mathrm{Tr}(\begin{pmatrix} a & c \\ a+b & c+d \end{pmatrix}) = a+c+d = 0.$$

Eine Basis für den Raum aller Matrizen, deren Einträge diese Bedingung erfüllen, ist

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\}.$$

c) Zunächst ist eine ONB des Zielraums zu berechnen. Da es sich um einen eindimensionalen Raum handelt, ist dazu nur der Erzeuger zu normalisieren. Wegen

$$\langle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\rangle = \mathrm{Tr}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1+2 = 3$$

ist $\{B\}$ mit $B = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine ONB. Nach Satz der Vorlesung erhält man die gesuchte Orthogonalprojektion via

$$\langle\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}|B\rangle B = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul.

a) Sei $x \in M$. Die Menge $\mathrm{ann}(x) := \{\, r \in R : r \cdot x = 0 \,\}$ heißt der *Annihilator* von x. Zeigen Sie: $\mathrm{ann}(x)$ ist ein Ideal.

b) Sei $r \in R$. Die Menge $V(r) := \{\, x \in M : r \cdot x = 0 \,\}$ heißt die *Lösungsmenge* von r. Zeigen Sie: $V(r)$ ist ein Untermodul von M.

Lösung.

a) (i) Sind $r_1, r_2 \in \mathrm{ann}(x)$, so gilt $r_1 \cdot x = r_2 \cdot x = 0$, dann auch $r_1 \cdot x + r_2 \cdot x = 0$, also auch $(r_1+r_2)\cdot x = 0$ und damit $r_1 + r_2 \in \mathrm{ann}(x)$. (ii) Sind $r \in \mathrm{ann}(x)$ und $s \in R$, so gilt $r \cdot x = 0$, dann auch $s \cdot (r \cdot x) = s \cdot 0 = 0$ und damit $(sr) \cdot x = 0$ und $sr \in \mathrm{ann}(x)$.

b) (i) $M \neq \emptyset$ weil zumindest $r \cdot 0 = 0$, also $0 \in M$. (ii) Sind $x_1, x_2 \in V(r)$ und $s_1, s_2 \in R$, so gilt $r \cdot x_1 = r \cdot x_2 = 0$, also $s_1 \cdot (r \cdot x_1) + s_2 \cdot (r \cdot x_2) = (s_1 r) \cdot x_1 + (s_2 r) \cdot x_2 = (r s_1) \cdot x_1 + (r s_2) \cdot x_2 = r \cdot (s_1 \cdot x_1 + s_2 \cdot x_2) = 0$, also $s_1 \cdot x_1 + s_2 \cdot x_2 \in V(r)$.