Lineare Algebra und Analytische Geometrie II · Sommer 2017 05.07.2017

**Erste Klausur**

| | k | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

Name (deutlich lesbar!) Matrikelnummer

---

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten leeren Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

---

**Aufgabe 1.** Wahr oder falsch?

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| Es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit Minimalpolynom $(X-1)(X-2)$ | ☐ | ☐ |
| Es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit Minimalpolynom $X^2$ | ☐ | ☐ |
| Wenn $\lambda$ Eigenwert von $A$ und von $B$ ist, dann auch von $AB$ | ☐ | ☐ |
| Wenn $v$ Eigenvektor von $A$ und von $B$ ist, dann auch von $AB$ | ☐ | ☐ |
| Wenn $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar ist, ist jedes $v \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor von $A$ | ☐ | ☐ |
| Wenn jedes $v \in \mathbb{K}^n$ Eigenvektor von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist, dann ist $A$ diagonalisierbar | ☐ | ☐ |
| Zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ können senkrecht aufeinander stehen | ☐ | ☐ |
| Jedes Orthogonalsystem ist linear unabhängig | ☐ | ☐ |
| Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det(A) = \pm 1$ ist eine Isometrie | ☐ | ☐ |
| Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit ist, dann ist auch $5A$ positiv definit | ☐ | ☐ |
| Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig, so ist $B^\top AB$ positiv definit | ☐ | ☐ |
| $1 = \mathrm{O}(\log(n))$ | ☐ | ☐ |

*Lösung.* wahr-wahr-falsch wahr-falsch-wahr falsch-wahr-falsch wahr-falsch-wahr

**Aufgabe 2.** Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenräume von $A$.

b) Wie lautet die Jordan-Normalform von $A$?

c) Konstruieren Sie einen zweidimensionalen $A$-invarianten Unterraum von $\mathbb{Q}^3$.

*Lösung.*

a) Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} -1-X & -1 & -1 \\ 1 & 2-X & 0 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} + (2-X)\begin{vmatrix} -1-X & -1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= -((-1)(1-X) - 1(-1)) + (2-X)((-1-X)(1-X) - 1(-1)) \\
&= -X + (2-X)(X^2 - 1 + 1) \\
&= X(-1 + 2X - X^2) = -X(X-1)^2.
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von $A$ sind somit 0 (einfach) und 1 (doppelt).

Eigenraum zum Eigenwert 0:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad | \cdot (-1) \quad \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow E_0 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Eigenraum zum Eigenwert 1:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow E_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

b) Da 0 ein einfacher Eigenwert ist und der doppelte Eigenwert 1 nur einen eindimensionalen Eigenraum hat, ist $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) z.B. $E_0 + E_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$.

**Aufgabe 3.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h(x) = Ax$. Zeigen Sie:

a) Wenn $h$ eine Projektion ist, dann kann $h$ nur 0 und 1 als Eigenwerte haben.

b) Die Umkehrung gilt aber nicht, d.h. es gibt ein $A$, das nur 0 und 1 als Eigenwerte hat, für das $h$ aber keine Projektion ist.

c) $h$ ist genau dann eine Isometrie, wenn alle Singulärwerte von $A$ gleich 1 sind.

*Lösung.*

a) Wenn $h$ eine Projektion ist, gilt $h^2 = h$, also $h^2 - h = 0$. Ist $x \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda$, so gilt also $(h^2 - h)(x) = \lambda^2 x - \lambda x = (\lambda^2 - \lambda)x = 0$, woraus wegen $x \neq 0$ folgt, dass $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

b) z.B. hat $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nur 1 als Eigenwert, ist aber keine Projektion, denn $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A$.

c) "$\Rightarrow$" $h$ ist Isometrie $\Rightarrow$ $A$ ist orthogonal $\Rightarrow$ $(A, I_n, I_n)$ ist eine SVD von $A$ $\Rightarrow$ Behauptung.

"$\Leftarrow$" Alle Singulärwerte von $A$ sind $1 \Rightarrow A = U\Sigma V^\top$ für $\Sigma = I_n$ und zwei orthogonale Matrizen $U, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Als orthogonale Matrizen sind $U, V$ orthogonal, dann auch $V^\top$ und dann auch $A = UV^\top$. Da also $A$ orthogonal ist, ist $h$ Isometrie.

**Aufgabe 4.**

a) Untersuchen Sie, ob es sich bei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ um eine positiv definite Matrix handelt.

b) Zeigen Sie: Wenn $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit sind, dann ist auch $A + B$ symmetrisch und positiv definit.

c) Formulieren Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt als Algorithmus. Gehen Sie von linear unabhängigen Vektoren $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$ als Eingabe aus und nehmen Sie an, dass $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet ist. Vergessen Sie nicht, dass zu einem Algorithmus immer auch eine Input/Output-Spezifikation gehört.

Bestimmen Sie die Komplexität des Algorithmus in Abhängigkeit von $n$ und $m$. Betrachten Sie dazu neben den Körperoperationen in $\mathbb{R}$ auch das Wurzelziehen als elementare Operation.

*Lösung.*

a)

$$|1| = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Daraus folgt, dass $A$ positiv definit ist.

b) Eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $xMx > 0$.

Nach Annahme sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist klar, dass $A + B$ zumindest auch symmetrisch ist. Aus der Positivdefinitheit von $A$ und $B$ folgt $xAx > 0$ und $xBx > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Addition liefert $xAx + xBx > 0$, also $x(A + B)x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Daraus folgt die Behauptung.

c) INPUT: $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig
OUTPUT: $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ so dass $\{v_1, \ldots, v_m\}$ eine ONB von $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.

```
für i = 1, ..., m:
  v_i = b_i
  für j = 1, ..., i − 1:
    v_i = v_i − ⟨b_i|v_j⟩v_j
  v_i = v_i/‖v_i‖
gib {v_1, ..., v_m} zurück.
```

Komplexität: Das Skalarprodukt in Zeile 4 kostet $n$ Multiplikationen und $n-1$ Additionen. Die Multiplikation des Resultats mit $v_j$ kostet $n$ Multiplikationen, die Subtraktion von $v_i$ schließlich $n$ Subtraktionen. Insgesamt kostet Zeile 4 demnach $4n-1 = \mathrm{O}(n)$ Körperoperationen. Die innere Schleife kostet dann $(i-1)(4n-1)$ Operationen. Schritt 5 kostet $3n$ Operationen ($n$ Multiplikationen, $n-1$ Additionen, 1 Wurzel, $n$ Divisionen). Der Schleifenkörper in Zeilen 2–5 kostet demnach $3n+(i-1)(4n-1)$ Operationen. Als Gesamtkosten erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{m}\bigl(3n+(i-1)(4n-1)\bigr) = 3nm + (4n-1)\frac{1}{2}m(m-1) = \mathrm{O}(nm^2)$$

Operationen.

**Aufgabe 5.** Es sei $h\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ ein $\mathbb{Z}$-Modul-Homomorphismus, und es sei $A = ((a_{i,j}))_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}[X]$. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $\mathbb{Z}^m/\operatorname{im} h$ ist torsionsfrei.

b) $\mathbb{Z}^n/\ker h$ ist torsionsfrei.

c) Wenn $A$ unimodular ist, dann gilt $\gcd(a_{i,1},\dots,a_{i,n}) = 1$ für alle $i = 1,\dots,n$.

d) Wenn $\gcd(a_{i,1},\dots,a_{i,n}) = 1$ für alle $i = 1,\dots,n$ gilt, dann ist $A$ unimodular.

*Lösung.*

a) Stimmt nicht: z.B. für $h\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $h(x) = 2x$ ist $\mathbb{Z}^m/\operatorname{im} h \cong \mathbb{Z}_2$, und das ist wegen $2\cdot 1 = 0$ nicht torsionsfrei.

b) Stimmt: Ist $[x]$ ein Torsionselement von $\mathbb{Z}^n/\ker h$, so gibt es ein $s \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ mit $s\cdot[x] = [0]$, also $[sx] = 0$, also $sx \in \ker h$, also $h(sx) = 0$, also $sh(x) = 0$, also $h(x) = 0$ (weil $s \neq 0$ und $\mathbb{Z}$ ein IB ist), also $x \in \ker h$, also $[x] = [0]$.

c) Stimmt: Ist nämlich $g$ ein gemeinsamer Teiler der Einträge einer bestimmten Zeile, so ist $g$ auch Teiler von $\det(A)$. Da $A$ aber unimodular ist, muss die Determinante in $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ liegen. Daraus folgt $g = 1$.

d) Stimmt nicht: z.B. ist $\begin{pmatrix} 1 & X \\ X & 1 \end{pmatrix}$ nicht unimodular, weil die Determinante $1 - X^2$ nicht in $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ liegt.