Übungsblatt 3

Besprechung am **26.03.2017**

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Diagonalisierbarkeit. Geben Sie im Fall der Diagonalisierbarkeit eine Basis aus Eigenvektoren an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -6 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

Aufgabe 2. Die Pell-Zahlen P_n sind definiert durch $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ und $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

a) Leiten Sie für die Folge $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Formel analog zur bekannten Binet-Formel $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ für die Fibonacci-Zahlen her.

b) Zeigen Sie, dass die Pell-Zahlen die Verdopplungsformel $P_{2n} = 2P_n(P_{n+1} - P_n)$ erfüllen. Ähnliche Formeln gibt es für alle C-finiten Folgen. Leiten Sie die entsprechende Formel für die Fibonacci-Zahlen her.

Aufgabe 3. Seien $p, q \in \mathbb{K}[X]$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Wenn sowohl A als auch B von p annihiliert werden, dann auch $A + B$.

b) Wenn sowohl A als auch B von p annihiliert werden, dann auch AB.

c) Wenn A von p annihiliert wird, dann auch $A^\top$.

d) Wenn $q(A)$ von p annihiliert wird, dann wird A von $p(q)$ annihiliert.

e) Wenn A von p und B von q annihiliert wird, dann $A + B$ von pq.

f) Wenn A invertierbar ist und von p annihiliert wird, dann wird A^{-1} vom Polynom $\operatorname{rev}(p)$ annihiliert, das aus p entsteht, indem man die Reihenfolge der Koeffizienten umkehrt, also z.B. $\operatorname{rev}(2 + X - 7X^2 + 3X^3) = 3 - 7X + X^2 + 2X^3$.

Aufgabe 4. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, und sei $V = \langle I_2, A\rangle \subseteq \mathbb{Q}^{2\times 2}$ der von I_2 und A erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$.

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.

b) Zeigen Sie, dass V zusammen mit der üblichen Matrizenmultiplikation einen Körper bildet, der zu $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ isomorph ist (d.h. es gibt eine bijektive Funktion $h\colon V \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $h(a+b) = h(a) + h(b)$ und $h(ab) = h(a)h(b)$ für alle $a, b \in V$).

Aufgabe 5. **Diese Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten.** Die direkte Summe $A \oplus B$ zweier Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{m\times m}$ ist definiert als $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(n+m)\times(n+m)}$.

Das kleinste gemeinsame Vielfache $\operatorname{lcm}(p, q)$ zweier Polynome $p, q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ ist definiert als das normierte Polynom $u \neq 0$ von kleinstmöglichem Grad, für das gilt $p \mid u$ und $q \mid u$.
Zeigen Sie:

a) $\operatorname{lcm}(p, q)$ ist eindeutig bestimmt.

b) Für jedes $p \in \mathbb{K}[X]$ gilt $p(A \oplus B) = p(A) \oplus p(B)$.

c) Sind m_A, m_B die Minimalpolynome von A und B, so ist $\operatorname{lcm}(m_A, m_B)$ das Minimalpolynom von $A \oplus B$.