Übungsblatt 12

Besprechung am **26. Juni 2017**

Aufgabe 1 Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Man zeige, daß jede Matrix B mit $||B - A|| < \frac{1}{||A^{-1}||}$ invertierbar ist. Hinweis: Nach Definition der Matrixnorm gilt $||Mv|| \leq ||M||\ ||v||$ für alle Matrizen M und Vektoren v. Wenn B nicht invertierbar wäre, dann würde ein Vektor mit Norm 1 im Kern existieren. Man versuche daraus einen Widerspruch zu konstruieren, ähnlich wie im Beweis von Satz 154.

Aufgabe 2 Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $\epsilon > 0$. Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, sodaß $||B - A|| < \epsilon$ gilt. Man zeige, daß folgende Ungleichung gilt:

$$||B^{-1} - A^{-1}|| < \frac{\epsilon||A^{-1}||^2}{1 - \epsilon||A^{-1}||}.$$

Die Ungleichung $||AB|| \leq ||A||\ ||B||$ darf ohne Beweis verwendet werden. Hinweis: wenn alle Stricke reißen, suchen Sie im Internet nach "Stetigkeit der Matrixinversion".

Aufgabe 3 Man konstruiere eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodaß für alle $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau \neq 0$, die Folge der Matrizen $((I_2 - \tau A)^k)_k$ divergiert (m.a.W. A lässt sich nicht durch Vielfache der Einheitsmatrix vorkonditionieren).
Bemerkung/Diskussion: Durch den Vorkonditionierer $P = A^\top, Q = I_2$ kann man auf symmetrische A zurückführen. Für symmetrische Matrizen ist im Skriptum gezeigt, daß hinreichend kleine positive τ funktionieren. Wenn man die Konditionszahl nicht kennt, besteht also ein Konflikt zwischen Sicherheit daß das Verfahren konvergiert und Konvergenzgeschwindigkeit.

Aufgabe 4 Wann gilt Gleichheit in der Hadamard'schen Ungleichung?

a) Für $n = 1, 2, 4$ konstruiere man jeweils eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, sodaß

$$|\det(A)| = n^{n/2} M^n \neq 0$$

gilt, wobei M der maximale Absolutbetrag der Einträge von A ist.

b) Man zeige, dass für ungerade $n > 1$ keine solche Matrix A exisiert.

Bemerkung: Es ist bekannt, dass für Zahlen $n > 2$, die nicht durch 4 teilbar sind, keine Matrix wie oben existiert. Es ist nicht bekannt, ob für alle Zahlen, die durch 4 teilbar sind, eine solche Matrix existiert.

Aufgabe 5 Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Einträgen aus dem Polynomring $\mathbb{R}[X]$ mithilfe der Cramerschen Regel. Rechnen Sie dazu die drei auftretenden Determinanten dadurch aus, dass Sie verschiedene Werte für X einsetzen und anschließend interpolieren.

$$\begin{pmatrix} (X-2)(X-1) & X-2 \\ X-1 & X-2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} X-1 \\ 2(X-2) \end{pmatrix}$$