Übungsblatt 11

Besprechung am **19.06.2017**

Aufgabe 1. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der das Produkt einer Hankel-Matrix der Größe $n \times n$ mit einer Töplitz-Matrix der Größe $n \times n$ berechnet und nicht mehr als $\mathrm{O}(n^2)$ Körperoperationen braucht.

Aufgabe 2.

a) Ein chinesischer Professor will seine Studenten gleichmäßig so auf k Räume aufteilen, dass in jedem Saal gleich viele Studenten sind. Das gelingt ihm nicht für $k = 2, 3, 4, 5, 6$ Räume, weil jeweils genau ein Student übrig bleibt. Erst auf $k = 7$ Räume lassen sie sich gleichmäßig aufteilen. Wie viele Studenten hat der Professor (mindestens)?

b) Berechnen Sie ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[X]$ mit $p(1) = 0$, $p(2) = 1$, $p(3) = -1$, $p(4) = 2$.

c) Bestimmen Sie ein $p \in \mathbb{Q}[X]$ mit $[-2X + 5]_{\sim_{(X-2)(X-3)}} \cap [\frac{1}{2}X]_{\sim_{(X-2)(X-4)}} = [p]_{\sim_{(X-2)(X-3)(X-4)}}$. Beachten Sie, dass Satz 143 nicht direkt anwendbar ist, weil $(X - 2)(X - 3)$ und $(X - 2)(X - 4)$ nicht teilerfremd sind. Warum ist das Problem trotzdem lösbar?

Aufgabe 3. Im Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_{17}$ ist 2 eine 8-te Einheitswurzel. Berechnen Sie $\mathrm{DFT}_8^{(2)}\, x$ für den Vektor $x = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \in \mathbb{K}^8$ sowohl mit der üblichen Matrix-Vektor-Multiplikation als auch mit dem FFT-Algorithmus. Wie viele Additionen und Multiplikationen werden jeweils verwendet?

Aufgabe 4.

a) In der Formulierung des Skriptums lässt sich der Strassen-Algorithmus nur auf Matrizen der Größe $n = 2^k$ anwenden. Ändern Sie den Algorithmus so ab, dass er bei gleicher asymptotischer Komplexität auf Matrizen beliebiger Größe anwendbar ist.

b) Strassens Algorithmus basiert auf einem bestimmten Schema zur Multiplikation von 2×2-Matrizen. Einige Jahre nach Strassen fand Victor Pan ein allgemeineres Schema, das zwei $m \times m$-Matrizen mit $\frac{1}{3}m^3 + 6m^2 - \frac{4}{3}m$ Multiplikationen und einigen Additionen multiplizieren kann. Ähnlich wie das Schema von Strassen lässt sich das Schema von Pan für jedes fixe m rekursiv anwenden. Bestimmen Sie für jedes m die Komplexität des resultierenden Algorithmus. Welches m ist optimal?

Aufgabe 5. Für ein Computeralgebrasystem Ihrer Wahl bezeichne $T(n)$ die tatsächliche Laufzeit (z. B. in Sekunden), die das System zum Multiplizieren zweier $n \times n$-Matrizen braucht. Messen Sie den Quotienten $T(2n)/T(n)$ für einige relativ große Werte von n und leiten Sie daraus eine Vermutung über die Komplexität des verwendeten Algorithmus ab. Bestimmen Sie auf die gleiche Weise auch die Komplexität des Algorithmus, der zur Polynommultiplikation verwendet wird.