Übungsblatt 8

Besprechung am **22. Mai 2017**

Aufgabe 1 Es seien $R_1 \subset R_2$ Körper und V ein R_2-Vektorraum. Es sei M ein endlich-dimensionaler R_2-Vektorraum. Dann ist M auch ein R_1-Vektorraum durch Einschränken der Multiplikation auf Skalare in R_1 (vergleiche Beispiel 8 auf Seite 239 im Skriptum). Wie hängen die Dimension von M als Vektorraum über R_1 und die Dimension von M als Vektorraum über R_2 zusammen, etwa im Fall $R_1 = \mathbb{R}$ und $R_2 = \mathbb{C}$?

Aufgabe 2 Zeigen Sie,

a) dass $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{Z}_{15}$ als $\mathbb{Z}$-Moduln zueinander isomorph sind;

b) dass $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul isomorph zum Untermodul $\mathbb{Z}5$ ist (obwohl dieser ein echter Untermodul ist).

Aufgabe 3 a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ ind $\mathbb{K}$ ein Körper. Man zeige, dass $\mathbb{K}^n$ als $\mathbb{K}^{n\times n}$-Modul (mit der Matrix-Vektor-Multiplikation) keine Untermoduln außer $\mathbb{K}^n$ und $\{0\}$ hat (die trivialen Untermoduln).

b) Es sei $n \geq 2$. Man konstruiere einen nichttrivialen Untermodul von $\mathbb{K}^{n\times n}$ als Modul über sich selbst.

Aufgabe 4 Es sei M ein $\mathbb{Z}$-Modul (aka eine abelsche Gruppe). Es sei $N := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$.

a) Man zeige, dass jedes Element aus N eine Darstellung $r \otimes m$ mit geeigneten $r \in \mathbb{Q}$, $m \in M$ besitzt.

b) Man zeige, dass durch die Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{Q} \times N \to N$, $p \cdot (r \otimes m) := (pr) \otimes m$ die Menge N zu einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum gemacht wird.

Kommentar:
Allgemeiner: Es seien R_1 und R_2 Ringe, und M ein R_1-Modul. Es sei $h : R_1 \to R_2$ ein Ring-Homomorphismus. Dann läßt sich auf ähnliche Weise eine R_2-Modulstruktur auf $R_2 \otimes_{R_1} M$ definieren. Im allgemeinen gilt allerdings nicht mehr, dass jedes Element des Tensor-Moduls eine Darstellung als einfaches Tensorprodukt besitzt, und das macht die allgemeine Konstruktion ein bisschen komplizierter. □

Aufgabe 5 Es sei R ein Integritätsbereich. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

A Jeder Untermodul V jedes freien Moduls U besitzt einen Komplementärmodul, d.h. einen Modul W sodass $V \oplus W = U$ ist.

B R ist ein Körper.

Hinweis: für $A \Rightarrow B$ reicht es, $U = R$ und $V = Ra \subset U$ (ein Hauptideal) mit $a \in R$ beliebig zu betrachten.

Kommentar:
Die Voraussetzung, dass R ein Integritätsbereich ist, ist notwendig (u.a.) wegen Beispiel 3b. □