Übungsblatt 4

Besprechung am **3. April 2017**

Aufgabe 1 Bestimmen Sie die Jordan-Normalenformen aller Matrizen in $(\mathbb{Z}_2)^{2\times 2}$, deren charakteristische Polynome nur lineare Faktoren haben. Wie viele von den 16 Matrizen in $(\mathbb{Z}_2)^{2\times 2}$ sind das? Welche Normalformen treten am häufigsten, welche am seltensten auf? Hinweis: Raten Sie vor der Rechung! Disclaimer: Dieser Hinweis macht die Aufgabe keineswegs leichter (aber eventuell interessanter).

Aufgabe 2 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 4 & -6 & -4 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man berechne eine Jordan-Normalform J von A und eine invertierbare Matrix B, sodaß $B^{-1}AB = J$ gilt.

Aufgabe 3 Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zwei Matrizen, für die $AB = BA$ gilt. Es seien $m_A = X^2 + 2$ und $m_B = X^2 + 3$ die Minimalpolynome von A und B. Man zeige, daß das Minimalpolynom von AB ein Teiler von $X^2 - 6$ ist.

Aufgabe 4 Eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{10\times 10}$ habe das charakteristische Polynom $\chi = (X-3)^5(X-2)^3(X-1)^2$ und das Minimalpolynom $m = (X-3)^3(X-2)^2(X-1)$.

a) Wie lautet die Jordan-Normalform, wenn $\dim E_3 = 2$ ist?
b) Wie lautet die Jordan-Normalform, wenn $\dim E_3 = 3$ ist?
c) Welche Werte von $\dim E_3$ sind überhaupt möglich?

Aufgabe 5 Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *nilpotent*, wenn eine natürliche Zahl m existiert, sodaß $A^m = 0$ ist. Man zeige oder widerlege:

a) Die Summe zweier nilpotenter Matrizen ist nilpotent.
b) Das Produkt zweier nilpotenter Matrizen ist nilpotent.
c) Es gibt keine diagonalisierbare nilpotente Matrix außer der Nullmatrix.

Zusatzfrage: Wenn $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ nilpotent ist, ist dann auch das charakteristische Polynom von A gleich X^n?