Lineare Algebra und Analytische Geometrie II · Sommer 2016 · **Mini-Test 8** 09.05.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

Aufgabe 1 Sei V ein Vektorraum. Bestimmen Sie alle injektiven Projektionen $h\colon V \to V$.

Lösung. Ist h eine Projektion, so gilt $h^2 = h$, d.h. für alle $x \in V$ gilt $h(h(x)) = h(x)$, also $h(h(x) - x) = 0$, also $h(x) - x \in \ker h$. Ist h außerdem injektiv, so gilt $\ker h = \{0\}$. Für alle $x \in V$ gilt dann also $h(x) - x = 0$, d.h. $h(x) = x$. Die einzige injektive Projektion ist also die Identitätsabbildung.

Aufgabe 2 Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{R}$ beliebig und $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie: $\|\Sigma\| = \max\{|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_n|\}$. Dabei steht $\|\cdot\|$ für die zur Standardnorm gehörende Matrix-Norm.

Lösung. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ beliebig. Schreibe $\sigma = \max\{|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_n|\}$. Dann gilt $\|\Sigma x\| = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \cdots + \sigma_n^2 x_n^2} \leq \sqrt{\sigma^2 (x_1^2 + \cdots + x_n^2)} = \sigma$. Daraus folgt $\|\Sigma\| \leq \sigma$. Umgekehrt: Ist $i \in \{1, \ldots, n\}$ so, dass $\sigma = |\sigma_i|$ gilt, so ist $\|\Sigma e_i\| = \sigma$. Daraus folgt $\|\Sigma\| \geq \sigma$. Aus beidem zusammen folgt die Behauptung.