Lineare Algebra und Analytische Geometrie II · Sommer 2016 · **Mini-Test 7** 02.05.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!): | | | | | | | |

Aufgabe 1 Sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und

$$A = \{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\}.$$

Konstruieren Sie mithilfe des Gram-Schmitt-Verfahrens einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, so dass $A \cup \{v\}$ eine ONB von $\mathbb{R}^3$ ist.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass A schon ein ONS ist, und dass $A \cup \{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Lösung. Setze $b_1 = v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $b_2 = v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ und $b_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
u_3 &= b_3 - \langle b_3|v_1\rangle v_1 - \langle b_3|v_2\rangle v_2 \\
&= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \underbrace{\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} | \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\rangle}_{=2/3} \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} - \underbrace{\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} | \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\rangle}_{=1/3} \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix}9-4-1\\0+4-2\\0-2-2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Normierung:

$$||u_3|| = \frac{1}{9}\sqrt{4^2+2^2+4^2} = \frac{1}{9}\sqrt{36} = \frac{6}{9}.$$

Damit hat $v = \frac{1}{||u_3||}u_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ die geforderte Eigenschaft.