Lineare Algebra und Analytische Geometrie II · Sommer 2016 · **Mini-Test 6** 25.04.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

Aufgabe 1 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine (nicht notwendigerweise symmetrische) Matrix mit $xAx > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A positiv sind.

Lösung. Angenommen es gäbe einen negativen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei $x \neq 0$ ein Eigenvektor zu λ. Dann gilt $xAx = x(\lambda x) = \lambda xx < 0$, im Widerspruch zu $xAx > 0$.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die Umkehrung der Aussage von Aufgabe 1 nicht gilt, indem Sie eine (nicht notwenigerweise symmetrische) Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ angeben, die nur positive Eigenwerte hat, für die aber $(1\ 1)A\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) < 0$ gilt. (*Hinweis:* Versuchen Sie es mit einer Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\0 & c\end{smallmatrix}\right)$.)

Lösung. $(1\ 1)\begin{pmatrix}a & b\\0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (1\ 1)\begin{pmatrix}a+b\\c\end{pmatrix} = a+b+c$. Da es sich um eine Dreiecksmatrix handelt, sind a und c die Eigenwerte. Diese sollen positiv sein. Wählen wir zum Beispiel $a = c = 1$. Für die Wahl $b = -20$ ist dann $a + b + c = -18 < 0$, wie gefordert.