Lineare Algebra und Analytische Geometrie II · Sommer 2016 · **Mini-Test 5** 18.04.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

Aufgabe 1 Geben Sie das Minimalpolynom, das charakteristische Polynom, sowie die Dimensionen der Eigenräume der folgenden Matrix an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{9\times 9}$$

Lösung. Minimalpolynom: $(X-1)^3(X-2)^2$.
Charakteristisches Polynom: $(1-X)^5(2-X)^4$.
$\dim E_1 = 2$, $\dim E_2 = 3$.

Aufgabe 2 Eine Matrix $M \in \mathbb{Q}^{7\times 7}$ hat das Minimalpolynom $(X-2)^3(X-5)$ und es gilt $\dim E_2 = 1$. Welche Dimension hat der Eigenraum E_5 (und warum)?

Lösung. Die Jordannormalform von M hat zwei Blöcke, einen zum Eigenwert 2 und einen zum Eigenwert 5. Der Block zum Eigenwert 2 hat ein einziges Kästchen, weil $\dim E_2 = 1$. Die Größe dieses Kästchens ist die Vielfachheit von $X-2$ im Minimalpolynom, also 3. Das ist dann also zugleich die Größe des Blocks zum Eigenwert 2. Wegen $M \in \mathbb{Q}^{7\times 7}$ muss der zweite Block die Größe $7-3=4$ haben. Da $X-5$ ein einfacher Faktor des Minimalpolynoms ist, kann dieser Block nur Kästchen der Größe 1 enthalten. Es muss deshalb 4 solcher Kästchen geben. Daraus folgt $\dim E_5 = 4$.