Lineare Algebra und Analytische Geometrie II · Sommer 2016 · **Mini-Test 3** 04.04.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

diagonalisierbar ist.

Lösung. Es gilt $\det(A - XI_3) = (1-X)^2(-1-X)$. Die Eigenwerte sind also -1 und 1 (doppelt). Wir berechnen die Eigenräume:

- $E_1 = \ker(A - I_3)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  also $E_1 = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ und $\dim E_1 = 2$.

- $E_{-1} = \ker(A + I_3)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  also $E_{-1} = \langle \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ und $\dim E_{-1} = 1$.

Aus $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 2 + 1 = 3$ folgt, dass A diagonalisierbar ist.