Lineare Algebra und Analytische Geometrie II · Sommer 2016 · **Mini-Test 13** 20.06.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

Aufgabe 1 Als Element von $\mathbb{Z}_7$ ist 2 eine primitive dritte Einheitswurzel. Geben Sie die Einträge der Matrix $\mathrm{DFT}_3^{(2)} \in \mathbb{Z}_7^{3\times 3}$ und ihrer Inversen an.

Lösung.

$$\mathrm{DFT}_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (\mathrm{DFT}_3^{(2)})^{-1} = \frac{1}{3}\,\mathrm{DFT}_3^{(1/2)} = 5\,\mathrm{DFT}_3^{(4)} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 Ein bestimmter Algorithmus benötige $\mathrm{O}(n^\alpha)$ Operationen zur Multiplikation zweier Dreiecksmatrizen der Größe $n \times n$. Zeigen Sie, dass sich dann auch beliebige $n \times n$-Matrizen mit $\mathrm{O}(n^\alpha)$ Operationen multiplizieren lassen. (Eine Matrix $((a_{i,j}))_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt Dreiecksmatrix, wenn $a_{i,j} = 0$ für alle $i > j$ gilt.)

Lösung. Für beliebige $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^{2n\times 2n}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^{2n\times 2n}} = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrizen links Dreiecksmatrizen sind, lassen sie sich nach Annahme mit $\mathrm{O}((2n)^\alpha) = \mathrm{O}(n^\alpha)$ Operationen multiplizieren. Aus dem Ergebnis lässt sich das Produkt AB ablesen.