Lineare Algebra und Analytische Geometrie II · Sommer 2016 · **Mini-Test 12** 13.06.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!):

Aufgabe 1 Es sei $A = ((a_{i,j}))_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix mit lauter identischen Zeilen, d.h. es gelte $a_{i,j} = a_{i+1,j}$ für alle i, j. Es sei $B = ((b_{i,j}))_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix mit lauter identischen Spalten, d.h. es gelte $a_{i,j} = a_{i,j+1}$ für alle i, j. Zeigen Sie:

1. dass man Ax zu gegebenem $x \in \mathbb{K}^n$ mit $\mathrm{O}(n)$ Operationen in $\mathbb{K}$ berechnen kann, und
2. dass man Bx zu gegebenem $x \in \mathbb{K}^n$ mit $\mathrm{O}(n)$ Operationen in $\mathbb{K}$ berechnen kann.

Lösung.

1. Berechne zunächst das Vektor-Vektorprodukt $\alpha = (a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}) \cdot x$. Das kostet $\mathrm{O}(n)$ Operationen. Nach Voraussetzung über A ist das Ergebnis $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha) \in \mathbb{K}^n$. Es ist also nichts weiter zu rechnen.
2. Wenn $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ist, berechne zunächst $\beta = x_1 + \cdots + x_n$. Das kostet $\mathrm{O}(n)$ Operationen. Wegen der Voraussetzung über B ist das Ergebnis $(b_{1,1}\beta, b_{2,1}\beta, \ldots, b_{n,1}\beta)$. Dessen Berechnung kostet noch einmal $\mathrm{O}(n)$ Operationen.