Lineare Algebra und Analytische Geometrie II · Sommer 2016 12.09.2016
Zweite Klausur für Studierende der Mathematik (inkl. Lehramt)
Dritte Klausur für Studierende der Physik

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!): | | | | | | | |

Studienrichtung: ☐ Physik / ☐ technische Mathematik, Lehramt, oder andere.

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Aufgaben, die mit $\boxed{\textbf{P}}$ gekennzeichnet sind, sind nur von Studierenden der Physik zu beantworten. Aufgaben, die mit $\boxed{\textbf{M}}$ gekennzeichnet sind, sind nur von den übrigen Studierenden zu beantworten. Aufgaben, die **nicht** gekennzeichnet sind, sind von allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zu beantworten.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. In dieser Aufgabe sind $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ und $\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts zu verstehen.

$$\gcd\big((X-1)^3(X-2)^5(X-3)^4, (X-1)^7(X-2)^2(X-4)^3\big) =$$

Das charakteristische Polynom von $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&4\\0&0&5\end{pmatrix}$ ist

Das Minimalpolynom von $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ ist

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix}\right\| =$$

$$|||\operatorname{diag}(1,2,3)||| =$$

$$\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix} \rangle^\perp =$$

Für eine Orthogonalprojektion $h\colon V \to V$ gilt $\ker h \cap (\operatorname{im} h)^\perp =$

$\boxed{\textbf{M}}$ $(\mathbb{Z}^3)_{\mathrm{tor}} =$

$\boxed{\textbf{M}}$ $(\mathbb{Z}_3)_{\mathrm{tor}} =$

Lösung. $(X-1)^3(X-2)^2$, $(1-X)(2-X)(5-X)$, $(X-1)^2$, 5, 3, $\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle$, $\ker h$, $\{0\}$, $\mathbb{Z}_3$.

Aufgabe 2.

a) Untersuchen Sie die Matrix $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 \\ 9 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ auf Diagonalisierbarkeit.

b) Sei $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar und $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar. Zeigen Sie: Dann ist auch $A = C^{-1}BC$ diagonalisierbar.

c) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig. Zeigen Sie: Dann ist $A = C^\top BC$ diagonalisierbar.

d) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie: Dann ist A diagonalisierbar.

Lösung.

a) Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom.

$$\begin{aligned}
\chi_M = \det(M - XI_4) = (-1-X) &\begin{vmatrix} 5-X & 0 & -2 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 6 & 0 & -2-X \end{vmatrix} \\
&= (-1-X)(1-X) \begin{vmatrix} 5-X & -2 \\ 6 & -2-X \end{vmatrix} \\
&= (X+1)(X-1)\big((5-X)(-2-X) - (-2)6\big) \\
&= (X+1)(X-1)\big(-10 - 3X + X^2 + 12\big) \\
&= (X+1)(X-1)(X-2)(X-1) = (X+1)(X-1)^2(X-2).
\end{aligned}$$

Damit sind $-1, 1, 2$ die Eigenwerte von M. Die Eigenwerte -1 und 2 sind einfach, daher kann der zugehörige Eigenraum nur eindimensional sein. Ob M diagonalisierbar ist, hängt deshalb nur von der Dimension des Eigenraums zu 1 ab. Wir bestimmen diese Dimension.

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 \\ 9 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & -4 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Rang von $A - I_4$ ist also zwei. Daraus folgt $\dim E_2 = 2$, und daraus folgt, dass M diagonalisierbar ist.

b) B ist diagonalisierbar. Nach Definition gibt es eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so dass $T^{-1}BT = D$ eine Diagonalmatrix ist. Dann gilt $B = TDT^{-1}$ und $A = C^{-1}TDT^{-1}C = (T^{-1}C)^{-1}D(T^{-1}C)$ und $(T^{-1}C)A(T^{-1}C)^{-1} = D$. Es gibt also eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$, nämlich $S = (T^{-1}C)^{-1} = C^{-1}T$, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Daraus folgt, dass A diagonalisierbar ist.

c) B ist symmetrisch, d.h. $B = B^\top$. Dann ist auch A symmetrisch, denn $A^\top = (C^\top BC)^\top = C^\top B^\top (C^\top)^\top = C^\top BC = A$. Nach einem Satz der Vorlesung sind alle symmetrischen Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar, also auch A.

d) Nach dem Satz über die Jordannormalform gibt es zu jedem Eigenwert einen Jordanblock. Da A nach Annahme n verschiedene Eigenwerte hat und andererseits von der Größe $n\times n$ ist, folgt, dass jeder Jordanblock die Größe 1×1 haben muss. Dann aber ist die Jordannormalform eine Diagonalmatrix, was zu zeigen war.

Aufgabe 3. Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ sei $\langle\cdot|\cdot\rangle\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\langle x|y\rangle = x \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} y$.

a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist.

b) Bestimmen Sie eine ONB des Unterraums $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ bezüglich $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

c) Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem obigen Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ausgestattet und $W = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Zeigen Sie, dass die linearen Abbildungen

$$f\colon V \to W, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -7 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} x, \qquad g\colon W \to V, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} x$$

zueinander adjungiert sind.

Lösung.

a) Zu zeigen ist, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ symmetrisch und positiv definit ist. Symmetrie ist offensichtlich. Positivdefinitheit folgt aus

$$2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 2 - 2 - 5 - 2 - 8 = 1 > 0.$$

b) Sei $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir verwenden Gram-Schmidt. Zunächst gilt $\|b_1\| = \sqrt{b_1 A b_1} = \sqrt{(1,1,1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1$. Damit können wir $v_1 = b_1$ setzen. Dann:

$$u_2 = b_2 - \langle b_2|v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{[(5,4,1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}]}_{=-5+8=3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5-3 \\ 4-3 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\|u_2\| = \sqrt{u_2 A u_2} = \sqrt{(2,1,-2) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}} = \sqrt{25} = 5$. Wir setzen $v_2 = \frac{1}{5} u_2$ und erhalten die ONB $\{v_1, v_2\}$.

c) Mit $\langle\cdot|\cdot\rangle_S$ sei das Standardskalarprodukt bezeichnet. Weiter bezeichne A die Matrix in der Definition von f und B jene in der Definition von g. Die Matrix aus der Definition des Skalarprodukts sei M.

Zu zeigen ist, dass für alle $x \in V$ und alle $y \in W$ gilt $\langle f(x)|y\rangle_S = \langle x|g(y)\rangle$. Seien also $x \in V$ und $y \in W$ beliebig. Dann gilt

$$\langle f(x)|y\rangle_S = (Ax)y = xA^\top y \quad \text{und} \quad \langle x|g(y)\rangle = xM(By) = x(MB)y.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $MB = A^\top$ gilt. Nachrechnen bestätigt:

$$MB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 9 & -2 \end{pmatrix} = A^\top.$$

Aufgabe 4. $\boxed{\textbf{P}}$ Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f, g\colon V \to V$ seien lineare Abbildungen. Ein Vektor $v \in V$ heißt *gemeinsamer Eigenvektor* von f und g, wenn v sowohl Eigenvektor von f als auch Eigenvektor von g ist. Es wird nicht gefordert, dass auch die Eigenwerte übereinstimmen.

a) Zeigen Sie: Ist v ein gemeinsamer Eigenvektor von f und g, so gilt $(f \circ g)(v) = (g \circ f)(v)$.

b) Zeigen Sie: Hat V eine Basis von gemeinsamen Eigenvektoren von f und g, so gilt $f \circ g = g \circ f$.

c) Zeigen Sie: Wenn $f \circ g = g \circ f$ gilt, ist jeder Eigenraum von f ein g-invarianter Unterraum.

Lösung.

a) Nach Annahme ist v ein Eigenvektor von f und von g, etwa zum Eigenwert λ_f bzw. λ_g. Dann gilt $(f \circ g)(v) = f(g(v)) = f(\lambda g v) = \lambda_g f(v) = \lambda_g \lambda_f v = \lambda_f \lambda_g v = \lambda_f g(v) = g(\lambda_f v) = g(f(v)) = (g \circ f)(v)$, wie behauptet.

b) Da es sich bei f und g um lineare Abbildungen handelt, genügt es zu zeigen, dass $(f \circ g)(b) = (g \circ f)(b)$ für alle Basisvektoren $b \in B$ gilt. Dies ist in Teil a) geschehen.

c) Zu zeigen: Wenn $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ ist, dann ist auch $g(v)$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ. Sei also $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ. Nach Voraussetzung gilt $(f \circ g)(v) = (g \circ f)(v)$, also $f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 5. $\boxed{\textbf{M}}$

a) Zur Erinnerung: Die *Spur* einer Matrix $A = ((a_{i,j}))_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist definiert als die Summe der Diagonalelemente: $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$. Zeigen Sie: Für zwei gegebene Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ lässt sich $\mathrm{Spur}(AB)$ mit $\mathrm{O}(n^2)$ Operationen in $\mathbb{K}$ berechnen.

b) Zeigen Sie, dass 4 eine primitive vierte Einheitswurzel in $\mathbb{Z}_{17}$ ist und bestimmen Sie die diskrete Fouriertransformierte des Vektors $(1, 2, 3, 4) \in \mathbb{Z}_{17}^4$. Sie müssen dazu nicht den FFT-Algorithmus verwenden, sondern können direkt mit der DFT-Matrix arbeiten.

c) Berechnen Sie die Smith-Normalform der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 0 & -5 & 15 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3 \times 3}$.

Lösung.

a) Sei $C = ((c_{i,j}))_{i,j=1}^{n} = A \cdot B$. Nach Definition des Matrixprodukts gilt $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$. Daraus folgt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}$. Um diese Doppelsumme zu berechnen, genügen offensichtlich $\mathrm{O}(n^2)$ Operationen in $\mathbb{K}$.

b) In $\mathbb{Z}_{17}$ gilt $4^1 = 4 \neq 1$, $4^2 = 16 = -1 \neq 1$, $4^3 = -4 \neq 1$, $4^4 = (4^2)^2 = (-1)^2 = 1$. Damit ist gezeigt, dass 4 eine primitive vierte Einheitswurzel ist. Für die geforderte Fouriertransformierte erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 0 & -5 & 15 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$