Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (Physik) · Sommer 16 · **Erste Klausur** 19.05.2016

Name (deutlich lesbar!): ....

Matrikelnummer (deutlich lesbar!): | | | | | | | |

- Es sind keine anderen Hilfsmittel als ein Stift zugelassen, insbesondere keine Unterlagen und keine elektronischen Geräte. Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus.
- Die Antworten zu Aufgabe 1 sind auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Notieren Sie die Antworten für die weiteren Aufgaben auf dem zur Verfügung gestellten weissen Papier. Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und legen Sie bei der Abgabe die Blätter in der Reihenfolge der Aufgaben zusammen, mit dem Aufgabenblatt als Deckblatt. Die abgegebenen Blätter werden oben links zusammengetackert. Halten Sie deshalb beim Schreiben genügend Abstand zu dieser Ecke.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Sie können die Teilnahme an der Klausur jederzeit ohne Abgabe einer Lösung beenden. Ein solcher Abbruch wird nicht als Fehlversuch gewertet.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

	wahr	falsch
Jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ ist Eigenwert der Nullmatrix	☐	☐
Jeder Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ ist Eigenvektor der Nullmatrix	☐	☐
Eigenräume stehen immer senkrecht aufeinander	☐	☐
Die Summer zweier Eigenvektoren ist ein Eigenvektor	☐	☐
Wenn A eine positiv definite Matrix ist, dann ist $-A$ negativ definit	☐	☐
Für jede Norm $\|\cdot\|$ gilt $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$	☐	☐
Jede symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar	☐	☐
Jede symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist invertierbar	☐	☐
Jede invertierbare Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist symmetrisch	☐	☐
Die Polynome $(X-1)^2(X-5)$ und $(X-2)(X-3)^4$ sind teilerfremd.	☐	☐
Für jede lineare Abbildung $f\colon V \to V$ gilt $\forall\, v, w \in V : \langle f(v)\|w\rangle = \langle v\|f(w)\rangle$.	☐	☐
Die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ hat nur positive Eigenwerte.	☐	☐

Lösung. falsch, wahr, falsch, falsch, wahr, falsch, wahr, falsch, falsch, wahr, falsch, falsch.

Aufgabe 2. Es sei $p = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$.

a) Als Element von $\mathbb{Z}_{19}[X]$ hat p zwei irreduzible Faktoren. Einer lautet $1 + 5X + X^2$. Wie lautet der andere?

b) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von p und X^{20}, wobei beide Polynome als Elemente von $\mathbb{Z}_{19}[X]$ interpretiert werden.

c) Als Element von $\mathbb{C}[X]$ hat p vier Nullstellen. Zeigen Sie: Für jede Nullstelle $\zeta \in \mathbb{C}$ von p gilt $|\zeta| = 1$. (*Hinweis:* Jede Nullstelle von p ist auch eine Nullstelle von $(1 - X)p$.)

Lösung.

a) Polynomendivision liefert $(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = (X^2 + 5X + 1)(X^2 - 4X + 1) + 0$, also ist $X^2 - 4X + 1 = X^2 + 15X + 1 \in \mathbb{Z}_{19}[X]$ der andere Faktor.

b) Offensichtlich ist X der einzige irreduzible Faktor von X^{20}, und es gilt $X \nmid p$. Daraus folgt $\gcd(p, X^{20}) = 1$.

c) Es gilt $(1 - X)p = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 - (X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5) = 1 - X^5$. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, dann ist λ auch eine Nullstelle von $1 - X^5$, d.h. es gilt $1 - \lambda^5 = 0$, d.h. $\lambda^5 = 1$, d.h. $|\lambda^5| = |\lambda|^5 = 1$. Daraus folgt $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 3. Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$.

a) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

b) Geben Sie das Minimalpolynom von A an.

c) Geben Sie einen dreidimensionalen A-invarianten Unterraum von $\mathbb{Q}^4$ an.

Lösung.

a) Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned}
\chi(A) = \det(A - XI_n) &= (-1 - X) \begin{vmatrix} -1 - X & 1 & 1 \\ -1 & 1 - X & 1 \\ -1 & 1 & 1 - X \end{vmatrix} \\
&= -(X + 1)\big((-1 - X)(1 - X)(1 - X) - 1 - 1 + (1 - X) - (-1 - X) + (1 - X)\big) \\
&= -(X + 1)\big(-(1 - X)^2(1 + X) \underbrace{-2 + 2 - 2X + 1 + X}_{= -X+1}\big) \\
&= -(X + 1)(1 - X)\big(-(1 - X)(1 + X) + 1\big) \\
&= (X + 1)(X - 1)X^2.
\end{aligned}$$

Damit sind -1 und $+1$ einfache Eigenwerte und 0 ist ein doppelter Eigenwert. Es ist sofort klar, dass $\dim E_1 = \dim E_{-1} = 1$ ist. Zur Bestimmung von $\dim E_0$ berechnen wir eine Basis von E_0.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot (-1) \quad {}^{2} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \quad | \cdot (-1) \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also $E_0 = \ker A = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, also $\dim E_0 = 2$.

Aus $\dim E_1 + \dim E_{-1} + \dim E_0 = 4 = \dim \mathbb{Q}^4$ folgt die Behauptung.

b) $(X-1)(X+1)X$, denn weil A diagonalisierbar ist, kann das Minimalpolynom keine mehrfachen Nullstellen haben.

c) Aus der Matrix ist unmittelbar ersichtlich, dass $(0,0,0,1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 ist. Ein invarianter Unterraum der Dimension drei ist deshalb z.B.

$$E_0 + E_{-1} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Aufgabe 4. In der Vorlesung kam mehrfach in Beispielen der Raum

$$\ell^2 = \left\{ (a_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt $\langle (a_n)_{n=0}^{\infty} | (b_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ vor. Dabei wurde aber gar nicht bewiesen, dass dies wirklich ein Skalaraprodukt ist.

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot | \cdot \rangle$ wirklich ein Skalarprodukt auf ℓ^2 ist.

b) Die Definition des Skalarprodukts lässt sich nicht ohne weiteres auf den größeren Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ausdehnen, weil dann die Konvergenz der Reihe im allgemeinen nicht mehr gewährleistet ist. Warum kann man das Skalarprodukt nicht einfach durch $\langle (a_n)_{n=0}^{\infty} | (b_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = \sum_{n=0}^{100} a_n b_n$ definieren, um diese Problematik zu umgehen?

c) Zeigen Sie, dass die Folgen $\left((-\frac{1}{2})^n\right)_{n=0}^{\infty}$ und $\left(3(-\frac{1}{2})^n - 5(\frac{1}{2})^n\right)_{n=0}^{\infty}$ senkrecht aufeinander stehen. (*Hinweis:* Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt.)

Lösung.

a) 1. $\langle (a_n)_{n=0}^{\infty} | (a_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \geq 0$, weil die Summe nur nichtnegative Terme enthält, und $\langle (a_n)_{n=0}^{\infty} | (a_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = 0 \iff (a_n)_{n=0}^{\infty} = 0$, weil eine Summe nichtnegativer Zahlen nur Null sein kann, wenn alle Terme Null sind, und aus $a_n^2 = 0$ folgt damit $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. $\langle (a_n)_{n=0}^{\infty} | (b_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n = \langle (b_n)_{n=0}^{\infty} | (a_n)_{n=0}^{\infty} \rangle$.

3. $\langle (a_n)_{n=0}^{\infty} | \beta (b_n)_{n=0}^{\infty} + \gamma (c_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\beta b_n + \gamma c_n) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n = \beta \langle (a_n)_{n=0}^{\infty} | (b_n)_{n=0}^{\infty} \rangle + \gamma \langle (a_n)_{n=0}^{\infty} | (c_n)_{n=0}^{\infty} \rangle$.

b) Weil für ein Skalarprodukt u.a. gelten muss $\langle (a_n)_{n=0}^{\infty} | (a_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = 0 \iff (a_n)_{n=0}^{\infty} = 0$. Für die Folge (a_n) mit $a_0 = a_1 = \cdots = a_{100} = 0$, $a_{101} = a_{102} = \cdots = 1$ gilt aber $(a_n) \neq 0$ und $\langle (a_n)_{n=0}^{\infty} | (a_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = \sum_{n=0}^{100} a_n^2 = 0$. Die Voraussetzungen für ein Skalarprodukt sind also nicht erfüllt.

c) Es ist zu zeigen, dass das Skalarprodukt der beiden Folgen Null ist. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}
\langle((-\frac{1}{2})^n)_{n=0}^{\infty}|(3(-\frac{1}{2})^n-5(\frac{1}{2})^n)_{n=0}^{\infty}\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n(3(-\frac{1}{2})^n-5(\frac{1}{2})^n) \\
&= 3\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^n-5\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{4})^n \\
&= \frac{3}{1-\frac{1}{4}}-\frac{5}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4\cdot 3}{4-1}-\frac{4\cdot 5}{4+1}=4-4=0.
\end{aligned}$$