Übungsblatt 9

Besprechung am **23.05.2016**

Aufgabe 1 Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebig Matrix und sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie $\mathrm{Spur}(PMP^\top) = \mathrm{Spur}(M)$.

Aufgabe 2 Auf $\mathbb{R}^{n\times m}$ definiert $\langle M, N\rangle := \mathrm{Spur}(N^\top M)$ ein Skalarprodukt (Blatt 6, Aufgabe 2). Sei $\|A\|_2 = \sqrt{\langle A, A\rangle}$ die davon induzierte Norm. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und sei $A = U\Sigma V^\top$ eine Singulärwertzerlegung von A. Sei $\varepsilon > 0$ und sei Σ' die Diagonalmatrix, die man aus Σ durch Nullsetzen aller jener Einträge erhält, die kleiner oder gleich ε sind; N sei dabei die Anzahl der Null gesetzen Einträge. Sei $A' = U\Sigma' V^\top$.

a) Zeigen Sie: $\|\cdot\|_2$ und $\|A\| := \sup\{\|Ax\| \ : \ \|x\| = 1\}$ sind zwei verschiedene Normen.

b) Zeigen Sie $\|A\|_2 = \|\Sigma\|_2$ und $\|A - A'\|_2 = \|\Sigma - \Sigma'\|_2$.

c) Zeigen Sie $\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_{ij} - a'_{ij})^2} = \|A - A'\|_2 \leq \sqrt{N}\,\varepsilon$. Was sagt diese Abschätzung über das Bildkompressionsverfahren von Kapitel 36 aus?

Aufgabe 3 a) Zeigen Sie: Die Menge $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bildet bezüglich $(m_1 \boxplus m_2) := m_1 m_2$ und $r \boxdot m := m^r$ einen $\mathbb{Z}$-Modul $(\mathbb{C}^*, \boxplus, \boxdot)$.

b) Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ ist ein Homomorphismus vom $\mathbb{Z}$-Modul $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ in den oben definierten $\mathbb{Z}$-Modul $(\mathbb{C}^*, \boxplus, \boxdot)$.

c) Bestimmen Sie $\ker h$ und $\mathrm{im}\, h$.

d) Zeigen Sie: $S = \{z \in \mathbb{C} \ : |z| = 1\}$ ist ein Untermodul von $\mathbb{C}^*$ und $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S$.

Aufgabe 4 [Schriftlich für Studierende, deren Matrikelnummer bei Division durch 3 den Rest 1 ergibt.] Sei $h \ : \ \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}^*$, $(a_1, a_2) \mapsto z_1^{a_1} z_2^{a_2}$ wobei $z_1 = e^{2\pi i/3}$ und $z_2 = e^{2\pi i/6}$.

a) Zeigen Sie, dass h ein Homomorphismus vom $\mathbb{Z}$-Modul $(\mathbb{Z}^2, +, \cdot)$ in den oben definierten $\mathbb{Z}$-Modul $(\mathbb{C}^*, \boxplus, \boxdot)$ ist.

b) Berechnen Sie das Gitter $\ker h$.

Aufgabe 5 Die Menge $C^\infty(\mathbb{R})$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist bezüglich der üblichen (punktweisen) Addition von Funktionen $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(p_0 + p_1 X + \cdots + p_n X^n) \cdot f := p_0 f + p_1 f' + \cdots + p_n f^{(n)}$ ein $\mathbb{R}[X]$-Modul.

a) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: $\mathrm{ann}(f) := \{p \in \mathbb{R}[X] \ : \ p \cdot f = 0\}$ ist ein Ideal von $\mathbb{R}[X]$.

b) Sei $p \in \mathbb{R}[X]$. Zeigen Sie: $L(p) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ : \ p \cdot f = 0\}$ ist ein Untermodul von $C^\infty(\mathbb{R})$.

c) Zeigen Sie: $L(X + 1)$ ist ein Untermodul von $L(X^2 - 1)$.

d) Seien $p \in \mathbb{R}[X]$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ wobei $p \cdot f = 0$. Sei $\mathbb{R}[X] \cdot f := \{a \cdot f \ : \ a \in \mathbb{R}[X]\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[X] \cdot f = \{c_0 f + c_1 f' + \cdots + c_d f^{(d)} \ : \ c_0, c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{R}\}$ mit $d = \deg(p)$.