Übungsblatt 8

Besprechung am **09.05.2016**

Aufgabe 1 Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, und sei $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um 60° mit der Drehachse $\langle v \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. (Sie können sich aussuchen, ob im Uhrzeigersinn oder im entgegengesetzten Sinn.)

a) Bestimmen Sie eine ONB B von $\mathbb{R}^3$ (bzgl. des Standardskalarprodukts), die $\frac{1}{||v||}v$ enthält.

b) Geben Sie die Abbildungsmatrix von h bezüglich B an. Dreht Ihre Version von h im Uhrzeigersinn oder entgegengesetzt?

c) Geben Sie die Abbildungsmatrix von h bezüglich der Standardbasis an.

d) Berechnen Sie $h(w)$ für $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 Seien $A = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & -2/6 \\ -1/6 & 5/6 & -2/6 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h(x) = Ax$.

a) Ist h eine Projektion? Eine Isometrie? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Ist h eine Orthogonalprojektion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit $\ker A = \{0\}$ und $P = A(A^\top A)^{-1}A^\top$.

a) Zeigen Sie, dass $A^\top A$ invertierbar ist. *Hinweis:* Betrachten Sie das Skalarproduct $\langle x|y\rangle := xAy$ für geeignete Vektoren.

b) Zeigen Sie: $P^\top = P$ und $P = P^2$.

c) Beweisen Sie, dass $P \cdot x = A(A^\top A)^{-1}A^\top x$ die Orthogonalprojektion von $x \in \mathbb{R}^m$ auf $\operatorname{im} A$ ist. *Hinweis:* $(\operatorname{im}(A))^\perp = \ker(A^\top)$

d) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 2}$. Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\operatorname{im} A$.

Aufgabe 4 Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie eine Singulärwertzerlegung von A.

Hinweis: $1 - 3t - 6t^2 + 3t^3 + t^4 = (-1 - t + t^2)(-1 + 4t + t^2)$

Aufgabe 5 [Schriftlich für Studierende, deren Matrikelnummer bei Division durch 3 den Rest 0 ergibt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und sei (U, Σ, V) eine Singulärwertzerlegung von A. Es seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\min(n,m)}$ die Singulärwerte von A, und es sei $r \in \{1, \ldots, \min(n, m)\}$ maximal mit $\sigma_r \neq 0$. Schreibe $V = (v_1, \ldots, v_m)$. Zeigen Sie:

a) $\{v_1, \ldots, v_r\}$ ist eine ONB von $\operatorname{coim} A$.

b) $\{v_{r+1}, \ldots, v_m\}$ ist eine ONB von $\ker A$.