Übungsblatt 7

Besprechung am **02.05.2016**

Aufgabe 1 Sei U der Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt, der von $(1,1,0,0)$, $(0,1,1,0)$ und $(0,0,1,1)$ aufgespannt wird.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U;

b) Welcher Vektor u von U, liegt am nächsten bei $(0,1,0,0)$?

c) Wie weit ist $(0,1,0,0)$ von U entfernt?

Aufgabe 2 Sei $k \in \{0,1,2,3\}$. Finden Sie jene Polynomfunktion vom Grad k, welche die Exponentialfunktion im Intervall $[-1,1]$ am besten approximiert, wobei die Norm von Funktionen gegeben sei durch

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx.$$

Hinweis: Die aus normierten Legendre-Polynomen bestehende Orthonormalbasis sollte hilfreich sein.
Es ist außerdem sinnvoll, hier passende Software zu verwenden und die Funktionen zu zeichnen.

Aufgabe 3 Für den Untervektorraum U von $\mathbb{R}[X]$, bestehend aus Polynomfunktionen höchstens dritten Grades, verwenden wir das Skalarprodukt

$$\langle p \mid q\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

Wir definieren $h : U \to \mathbb{R}$ durch

$$h(p) := p(1).$$

Zeigen Sie, dass $h \in U^*$ und finden Sie ein Polynom q, sodass für alle $p \in U$ gilt

$$h(p) = \langle p \mid q\rangle.$$

Aufgabe 4 Für jede der Matrizen A sei $h : V \to V$ die durch $h(x) = Ax$ definierte lineare Abbildung für einen geeigneten Vektorraum V. Finden Sie, falls möglich, eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von h sowie eine Matrix P und eine Diagonalmatrix D, sodass $P^\top AP = D$.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 [Schriftlich für Studierende, deren Matrikelnummer bei Division durch 3 den Rest 2 ergibt.] Beweisen Sie den 4. Teil von Satz 101: Seien $U, V, W)$ Skalarprodukträume, $f_1 \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $f_2 \in \mathrm{Hom}(V,W)$, und f_1^* bzw. f_2^* deren adjungierte Abbildungen, dann gibt es auch die adjungierte Abbildung zu $f_2 \circ f_1$, und es gilt

$$(f_2 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_2^*.$$