Übungsblatt 6

Besprechung am **25.04.2016**

Aufgabe 1 Sei V ein Skalarproduktraum mit Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v|v\rangle}$.

a) Sei $x, y \in V$. Zeigen Sie $\|x+y\| = \|x-y\| \iff x \perp y$.

b) Sei $b_1, \ldots, b_n$ ein Orthonormalsystem in V und sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \quad \text{und} \quad \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\| = 0 \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Aufgabe 2 [Schriftlich für Studierende, deren Matrikelnummer bei Division durch 3 den Rest 1 ergibt.] Zeigen Sie, dass

$$\langle A|B\rangle := \mathrm{Spur}(B^\top A)$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist. *Hinweis*: Die Spur einer $n \times n$ - Matrix P ist per Definition die Summe der Diagonalemente von P:

$$\mathrm{Spur}(P) := \sum_{k=1}^{n} p_{kk}.$$

Aufgabe 3 Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit, positiv semidefinit, indefinit, negativ definit bzw. negativ semidefinit?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = A_2 \cdot \mathrm{diag}(1,1,0) \cdot A_2^{-1},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_5 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & A_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \\ 4 & 9 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 10 & 100 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie eine Zerlegung $A_1 = B^\top B$, wobei B eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 4 Berechnen Sie eine Basis von $\ker(M^\top M) = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ M^\top M \cdot x = 0\}$ für

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 Seien sowohl A also auch $I - A$ positiv definite symmetrische Matrizen. Zeigen Sie, dass dann auch $A^{-1} - I$ symmetrisch und positiv definit ist. *Hinweis:* Etwa über die Eigenwerte von A, unter Verwendung von Aufgabe 2 vom 4. Übungsblatt.