Übungsblatt 5

Besprechung am **18.04.2016**

Aufgabe 1 Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Matrizen in $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Berechnen Sie das Minimalpolynom von A mithilfe der Methoden aus Abschnitt 27.

b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von B mithilfe von Satz 90. Hinweis: Nach Satz 90.3 gilt, dass die Vielfachheit der λ_i in dem Minimalpolynom das kleinste s ist, sodass $E_{\lambda_i}^{(s)} = E_{\lambda_i}^{(s+1)}$.

c) Konstruieren Sie eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, deren Minimalpolynom x^2 ist. Gibt es eine Matrix mit Minimalpolynom x^2, die invertierbar ist?

Aufgabe 2 Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Gesucht sind Funktionen $x_1, \ldots, x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A und $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, dann ist $x_1(t) = v_1 e^{\lambda t}, \ldots, x_n(t) = v_n e^{\lambda t}$ eine Lösung.

b) Zeigen Sie: Ist $\chi(A)$ das charakteristische Polynom von A und sind $x_1, \ldots, x_n$ wie oben, so gilt $\chi(A)(\frac{d}{dt}) \cdot x_i(t) = 0$ für alle t und alle $i = 1, \ldots, n$.

c) Bestimmen Sie die Lösung $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ für den Fall $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$. Hinweis: die Lösungen bilden ein zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Aufgabe 3 [schriftlich für Studierende, deren Matrikelnummer bei Division durch 3 den Rest 0 ergibt] Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $h : V \to V$ ein Endomorphismus.

a) Sei $f \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Im}(f(h))$ ein h-invarianter Unterraum ist.

b) Seien U_1, U_2 invariante Unterräume. Beweisen Sie, dass $U_3 = U_1 + U_2$ ein invarianter Unterraum ist.

Aufgabe 4 Seien $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ Matrizen in $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Berechnen Sie J und B, sodass J eine Jordan-Normalform ist und $D = B^{-1}JB$

b) Berechnen Sie J und B, sodass J eine Jordan-Normalform ist und $E = B^{-1}JB$.

c) Betrachte eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit Minimalpolynom $m = (X-3)(X-4)^2$, $\dim(E_4) = 2$ und $\dim(E_3) = 2$. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von M.

Aufgabe 5 Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

a) Sei $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt. Für welche $x, y \in V$ gilt $\langle x|y\rangle^2 = \langle x|x\rangle \langle y|y\rangle$?

b) Seien $u, v \in V$. Zeigen Sie: $||au + bv|| = ||bu + av||$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $||u|| = ||v||$.

c) Sei $V = \mathbb{R}^3$. Wird durch $\langle (x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3) \rangle := x_1 y_1 + x_3 y_3$ ein Skalarprodukt definiert?