

Übungsblatt 4

Besprechung am 11.04.2016

Aufgabe 1 Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar?

$$A_1 = \begin{pmatrix} -22 & -2 & -10 \\ 24 & 4 & 10 \\ 48 & 4 & 22 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 38 & 30 & 22 \\ -71 & -57 & -43 \\ 35 & 29 & 23 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 97 & -106 & 48 \\ 0 & -1 & 0 \\ -196 & 212 & -97 \end{pmatrix},$$

Man berechne für eine der diagonalisierbaren Matrizen oben auch eine invertierbare Matrix T , sodaß $T^{-1}A_iT$ eine Diagonalmatrix ist.

Die Verwendung von Mathematica zum Lösen von Gleichungssystemen und Berechnung von Determinanten ist erlaubt.

Aufgabe 2 [schriftlich für Studierende, deren Matrikelnummer bei Division durch 3 den Rest 2 ergibt] Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Es sei $p \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom in der Variable X . Man zeige: Wenn λ ein Eigenwert von A ist, dann ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$.

Aufgabe 3 Man berechne die Eigenwerte und Eigenräume der Permutationsmatrix zur Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Aufgabe 4 Es sei $V = \mathbb{R}^2$. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Endomorphismus mit verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Es sei $p(X) := \frac{X-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \in \mathbb{R}[X]$. Man zeige, dass $p(f)$ die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $p(f) \circ p(f) = p(f)$.
- Das Bild von $p(f)$ ist der Eigenraum von λ_1 .

Ein Endomorphismus mit der Eigenschaft a) und Bild W heißt auch Projektion auf W .

Aufgabe 5 Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Es sei $v = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Man berechne numerisch zuerst v , dann $A^{100}v$ mit einer Schleife mit einem Computer oder programmierbaren Taschenrechner. Scheint die Folge $(A^n v)_{n \in \mathbb{N}}$ zu konvergieren oder zu divergieren? Man vergleiche mit Beispiel 28.4. *Never trust a numerical calculation blindly.*