Übungsblatt 3

Besprechung am **04.04.2016**

Aufgabe 1 Sei $p \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ und seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ sodass $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von p ist. Zeigen Sie, dass dann in $\mathbb{Z}$ sowohl $a \mid p(0)$ als auch $b \mid \mathrm{lc}(p)$ gilt.

Aufgabe 2 Der $\mathbb{K}$-Vektorraumendomorphismus $h \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^3)$ sei durch die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis gegeben. Bestimmen Sie die Eigenwerte von h falls

a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$,
b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,
c) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 3 Gegeben sei die folgende Matrix in $\mathbb{C}^{4\times 4}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und deren Vielfachheit.
b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von A den zugehörigen Eigenraum und dessen Dimension.
c) Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 4 [schriftlich für Studierende deren Matrikelnummer bei Division durch 3 den Rest 1 ergibt] In der Ebene betrachten wir folgende vier geometrische Operationen:

a) Streckung um den Faktor 2 ausgehend von $(0, 0)$,
b) Verschiebung um den Vektor $(0, 1)$,
c) Spiegelung entlang der durch $(0, 0)$ und $(1, 1)$ gehenden Geraden,
d) Rotation um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt $(0, 0)$.

Falls die jeweilige Operation ein $\mathbb{R}$-Vektorraumendomorphismus von $\mathbb{R}^2$ ist, bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte und Eigenräume sowie die Diagonalisierbarkeit der Abbildungsmatrix.

Aufgabe 5 a) Beweisen Sie Satz 77 im Skriptum: Die Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation.

b) Gegeben sei eine Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Bestimmen Sie alle Diagonalmatrizen, die zu D ähnlich sind.