# Übungsblatt 2

Besprechung am **14.03.2016**

---

**Aufgabe 1** [schriftlich für Studierende, deren Matrikelnummer durch 3 teilbar ist]
Gegeben seien die Polynome $p = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ und $q = X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 2X$.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Polynomendivision den Quotienten und den Rest der Division von $X^{12}$ geteilt durch $p$ (im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$).

b) Berechnen Sie $\gcd(p, q)$ in $\mathbb{Q}[X]$.

c) Berechnen Sie $\gcd(p, q)$ in $\mathbb{Z}_5[X]$.

**Aufgabe 2** a) Zeigen Sie, dass für die formale Ableitung von Polynomen

$$' \colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i i X^{i-1}$$

die wohlbekannte Produktregel $(pq)' = p'q + pq'$ gilt.

b) Seien $p, q \in \mathbb{R}[X]$ und sei $q$ irreduzibel. Beweisen Sie:

$$q \mid p \ \wedge \ q \mid p' \iff q^2 \mid p.$$

Interpretieren Sie diese Aussage im Fall $\deg(q) = 1$ geometrisch, und zwar anhand der $p$ zugeordneten Polynomfunktion.

**Aufgabe 3** In Satz 72 wurde für Polynome in $\mathbb{K}[X]$ der erweiterte euklidische Algorithmus zur Berechnung des gcd und der dazugehörigen Kofaktoren vorgestellt. In dieser Aufgabe wollen wir uns mit dem entsprechenden Algorithmus für ganze Zahlen beschäftigen. Seien $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $p = 83$ und $q = 36$.

a) Wenden Sie den erweiterten euklidischen Algorithmus an, um sowohl den größten gemeinsamen Teiler $g \in \mathbb{Z}$ von $p$ und $q$, als auch $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $g = up + vq$ zu berechnen.

b) Bestimmen Sie das multiplikative Inverse von $q$ im Körper $\mathbb{Z}_p$.

**Aufgabe 4** Gegeben sei das Polynom $a = X^3 - X^2 + 2X - 5$. Berechnen Sie $a^{10}$ in $\mathbb{Q}[X]/p\mathbb{Q}[X]$ mit

a) $p = X - 1$

b) $p = X^2 + X + 3$

**Aufgabe 5** Seien $p_1, \ldots, p_n$ Polynome in $\mathbb{K}[X]$ und sei die Menge $I$ definiert durch:

$$I := \{u_1 p_1 + \cdots + u_n p_n : u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Zu zeigen ist, dass es ein Polynom $g \in \mathbb{K}[X]$ gibt, so dass $I = \{ug : u \in \mathbb{K}[X]\}$.

a) Führen Sie den Beweis zunächst für $n = 2$ durch.

b) Zeigen Sie nun die Aussage für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion.