Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 **Sommersemester 2016**
http://www.algebra.uni-linz.ac.at/teaching/ss2016/linalg/

Übungsblatt 14

Besprechung am **27.06.2016**

Aufgabe 1 (DFT als Koordinatendarstellung bezüglich einer Orthonormalbasis) Sei $n \geq 2$. Wir definieren auf $\mathbb{C}^n$ ein Skalarprodukt durch

$$\langle (x_0, \ldots, x_{n-1}), (y_0, \ldots, y_{n-1}) \rangle := n \sum_{i=0}^{n-1} x_i \overline{y_i}.$$

Sei $\omega := e^{2\pi i/n}$ eine primitive n-te Einheitwurzel. Wir definieren Vektoren $b_0, \ldots, b_{n-1}$ in $\mathbb{C}^n$ durch $(b_i)_j := \frac{1}{n}\omega^{-i\,j}$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $k, l \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $k \neq l$ gilt, dass $\langle b_k, b_l \rangle = 0$ und $\langle b_k, b_k \rangle = 1$.

b) Schließen Sie daraus, dass $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ über $\mathbb{C}$ linear unabhängig und daher eine Basis von $\mathbb{C}^n$ ist.

c) Zeigen Sie, dass Sie für $v = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i b_i$ die Koordinaten von v durch $\alpha_i = \langle v, b_i \rangle$ gewinnen können, und dass $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})^\top = \mathrm{DFT}_n^{(\omega)} \cdot (v_0, \ldots, v_{n-1})^\top$.

d) Zeigen Sie, dass der Zusammenhang $v = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i b_i$ genau die Formel für die Inverse der DFT, also $v = \mathrm{DFT}_n^{(\omega^{-1})} \cdot (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})^T$ liefert.

Aufgabe 2 (DFT) Sei $n \geq 2$, und sei P_n der Vektorraum der Polynome vom Grad $< n$ über $\mathbb{C}$. Sei $\omega := e^{2\pi i/n}$ eine primitive n-te Einheitwurzel. Wir definieren ein Skalarprodukt auf P_n durch $\langle \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i, \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i X^i \rangle := n \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \overline{\beta_i}$. Für $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ sei $b_i := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-i\,j} X^j$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $p, q \in P_n$ gilt: $\langle p, q \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} p(\omega^j)\overline{q(\omega^j)}$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $i \neq j$ gilt, dass $b_i(\omega^j) = 0$ wenn $i \neq j$ und $b_i(\omega^i) = 1$.

c) Zeigen Sie, dass Sie für $v = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i b_i$ das Koordinatentupel $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ durch die Auswertung $(v(\omega^0), \ldots, v(\omega^{n-1}))$ gegeben ist.

Aufgabe 3 Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Einträgen aus dem Polynomring $\mathbb{R}[X]$ mithilfe der Cramerschen Regel. Rechnen Sie dazu die drei auftretenden Determinanten dadurch aus, dass Sie verschiedene Werte für X einsetzen und anschließend interpolieren.

$$\begin{pmatrix} (X-2)(X-1) & X-2 \\ X-1 & X-2 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} X-1 \\ 2(X-2) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

a) Sei $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ eine reelle $n \times n$-Matrix, sodass in jeder Zeile das Diagonalelement größer als die Summe der Beträge der anderen Einträge ist. Das heißt, dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$a_{i,i} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Zeigen Sie, dass A invertierbar ist. *Hinweis:* Betrachten Sie die Matrix $B := \mathrm{diag}(\frac{1}{a_{1,1}}, \frac{1}{a_{2,2}}, \ldots, \frac{1}{a_{n,n}}) \cdot A$. Zeigen Sie, dass $||I_2 - B|| < 1$ ist, wenn $||.||$ die der Maximumsnorm $||(x_1, \ldots, x_n)|| := \max\{|x_i| \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ zugeordnete Matrixnorm ist.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

mithilfe eines Näherungsverfahrens. Formen Sie dazu das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ in eine Iterationsvorschrift $x_{k+1} = (I_2 - A) \cdot x_k + b$ um, und starten Sie bei $x_0 := (0, 0)$.

Aufgabe 5 Wir lösen Aufgabe 1 vom Blatt 7 aus dem Wintersemester nocheinmal, diesmal aber unter Verwendung unseres seither erworbenen Wissens aus der linearen Algebra. Das Beispiel war:

> Sei $A_n \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ diejenige Matrix $((a_{i,j}))_{i,j=1}^n$, deren Einträge folgendermaßen definiert sind: $a_{i,j} = 1$, falls $i \neq j$, und $a_{i,i} = 0$ für alle i. Berechnen Sie $\det(A_n)$.

Sei J_n dazu die $n \times n$-Matrix, deren Einträge alle 1 sind. Dann gilt $A_n = J_n - I_n$.

a) Zeigen Sie: J_n hat den Eigenwert 0 mit geometrischer Vielfachheit $n-1$ und den Eigenwert n mit Vielfachheit 1.

b) Schließen Sie daraus auf die Eigenwerte von $A_n = J_n - I_n$.

c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $c_{A_n} = \det(A_n - X\, I_n)$.

d) Berechnen Sie daraus $c_{A_n}(0)$, und damit die Determinante.

Wir wünschen Ihnen schöne Ferien!