Übungsblatt 13

Besprechung am **20.06.2016**

Aufgabe 1 Ein Algorithmus löse ein Problem der Größe n rekursiv durch Lösen von $a \geq 1$ Unterproblemen der Größe n/b, wobei $b > 1$. Dabei sei n von der Form $n = b^k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Sei $f(n)$ die Anzahl der Aufrufe des Basisfalls (Problem der Größe 1), die bei der Lösung eines Problems der Größe n auftritt. Zeigen Sie $f(n) = n^{\log a/\log b}$. Bestimmen Sie so die Anzahl der Aufrufe des Basisfalls für

a) Karatsubas Multiplikation zweier Polynome, deren Grad jeweils kleiner n ist (Algorithmus 16);
b) Strassens Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen (Algorithmus 17);
c) Inversion einer $n \times n$-Matrix (Algorithmus 18);
d) eine FFT eines Vektors der Länge n (Algorithmus 15).

Aufgabe 2 Sei $n = 1000$, $\omega = e^{2\pi i/n}$. Berechnen Sie die diskrete Fourier-Transformierte $y = \mathrm{DFT}_n^{(\omega)} \cdot x$ für:

a) $(x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$ mit $x_j = \omega^{-25j}$
b) $(x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$ mit $x_j = \omega^{+25j}$
c) $(x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$ mit $x_j = \cos(2\pi \frac{25j}{n})$

Hinweis: Zum Lösen dieser Aufgabe braucht man keinen Computer.

Aufgabe 3 [Schriftlich für Studierende, deren Matrikelnummer kongruent zu 2 modulo 3 ist.] Sei $\omega = e^{2\pi i/n}$, sei $x \in \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$ und sei $y = \mathrm{DFT}_n^{(\omega)} \cdot x$. Zeigen Sie $y_{n-k} = \overline{y_k}$ für $0 \leq k < n$, wobei $\overline{y_k}$ die zu y_k komplex konjugierte Zahl ist.

Aufgabe 4 Sei $x = (30, 5, 10, 4) \in \mathbb{C}^4$. Berechnen Sie $y = \mathrm{DFT}_4^{(i)} \cdot x$ und $z = (\mathrm{DFT}_4^{(i)})^{-1} \cdot y$ durch jeweils eine FFT (Algorithmus 15). Wie viele arithmetische Operationen in $\mathbb{C}$ sind dazu nötig?

Aufgabe 5 Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Berechnung von $y = \mathrm{DFT}_n^{(\omega)} \cdot x$ für $x \in \mathbb{K}^n$ wobei $n = 3^k$ eine Dreierpotenz ist und ω eine n-te Einheitswurzel in $\mathbb{K}$. Bestimmen Sie die Komplexität Ihres Algorithmus.
Hinweis: Für $y = \mathrm{DFT}_{3m}^{\omega} \cdot x$ mit $x \in \mathbb{K}^{3m}$ gilt

$$y_i = \sum_{j=0}^{3m-1} \omega^{ij} x_j = \sum_{r=0}^{2} \sum_{k=0}^{m-1} \omega^{i(3k+r)} x_{3k+r} \qquad (0 \leq i < 3m).$$