Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 **Sommersemester 2016**
http://www.algebra.uni-linz.ac.at/teaching/ss2016/linalg/

Übungsblatt 12

Besprechung am **13.06.2016**

Aufgabe 1 a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion sodass die Berechnung von $f(n)$ eine Komplexität von $O(n^2)$ hat. Welche Komplexität hat die Berechnung von $F(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)$?

b) Seien $a, b, c, d : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Es gilt $a(n) = O(b(n))$ und $c(n) = O(d(n))$. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten mit einem Beweis oder Gegenbeispiel.

- $a(n) + c(n) = O(b(n) + d(n))$
- $a(n) \cdot c(n) = O(b(n) \cdot d(n))$
- Wenn $b(n) = d(n)$, dann gilt $a(n) = O(c(n))$.

Aufgabe 2 a) Formulieren Sie Algorithmus 11 für beliebige (nicht notwendigerweise quadratische) Matrizen.

b) Bestimmen Sie die Komplexität dieses Algorithmus.

c) Wie viele Null-Einträge müssen zwei (rechteckige) Matrizen A und B haben, damit Algorithmus 12 schneller ist als der Standardalgorithmus?

Aufgabe 3 Bestimmen Sie den Kern der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{7\times 7}.$$

Aufgabe 4 [Schriftlich für Studierende, deren Matrikelnummer bei Division durch 3 den Rest 1 ergibt] Sei $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix. Sei $J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass H ist genau dann eine Hankel-Matrix, wenn $T = J_n H$ eine Töplitz-Matrix ist.

Aufgabe 5 a) Bestimmen Sie ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[X]$ mit $p(1) = 2$, $p(2) = -1$, $p(3) = 1$, $p(4) = 0$ mithilfe der Newton-Interpolation.

b) Bestimmen Sie alle $p \in \mathbb{Z}$ sodass $p \equiv_3 2$, $p \equiv_5 2$, $p \equiv_7 5$.