Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 **Sommersemester 2016**
http://www.algebra.uni-linz.ac.at/teaching/ss2016/linalg/

Übungsblatt 10

Besprechung am **30.05.2016**

Aufgabe 1 [Schriftlich für Studierende, deren Matrikelnummer bei Division durch 3 den Rest 2 ergibt] Zeigen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes,

a) dass $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{Z}_{15}$ als $\mathbb{Z}$-Moduln zueinander isomorph sind, und

b) dass $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul isomorph zum Untermodul $5\mathbb{Z}$ ist (obwohl $5\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$ gilt).

Aufgabe 2 Für $\mathbb{K}$-Vektorräume $V, W \neq \{0\}$ gilt immer $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W) \geq \dim(V) + \dim(W) = \dim(V \times W)$. Das Tensor-Produkt ist also mindestens so groß wie das kartesische Produkt. Für Moduln gilt das nicht unbedingt, wie man an folgendem Beispiel sieht:

a) Wie viele Elemente hat der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$?

b) Wie viele Elemente hat der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbf{F}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$?

c) Wie viele Elemente hat der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3$?

Aufgabe 3 Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal von R. Zeigen Sie:

a) Wenn I als R-Modul frei ist, dann gibt es ein Element $a \in R$ mit $I = \langle a \rangle$.

b) Wenn R ein Integritätsbereich ist, dann ist I torisionsfrei.

c) Wenn $I \neq \{0\}$ ist, dann ist R/I ein Torsionsmodul.

Aufgabe 4 a) Im Beispiel zu Satz 122 wird behauptet, dass $\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\}$ eine Basis des von $\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\}$ erzeugten Untermoduls von $\mathbb{Z}^3$ ist. Überprüfen Sie, ob das stimmt.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -2 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker_{\mathbb{Z}} A$.

Aufgabe 5 Sei $A \in \mathbb{Z}^{n \times m} \subseteq \mathbb{Q}^{n \times m}$. Zeigen Sie: Jede $\mathbb{Z}$-Modulbasis von $\ker_{\mathbb{Z}} A$ ist eine $\mathbb{Q}$-Vektorraumbasis von $\ker_{\mathbb{Q}} A$.