Übungsblatt 1

Besprechung am **07.03.2016**

Aufgabe 1 Sei U_1 der Vektorraum, der von $(2,5,1,6)$ und $(1,2,0,3)$ aufgespannt wird; und sei U_2 der Vektorraum, der von $(1,1,0,2)$ und $(1,0,0,1)$ aufgespannt wird. Bestimmen Sie

a) eine Basis von $U_1 + U_2$;

b) eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 2 Sei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und $U_1 = \operatorname{Ker} A_1$; weiters sei

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $U_2 = \operatorname{Ker} A_2$. Bestimmen Sie

a) eine Basis von $U_1 + U_2$;

b) eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

c) eine Matrix S sodass $U_1 + U_2 = \operatorname{Ker} S$;

d) eine Matrix N sodass $U_1 \cap U_2 = \operatorname{Ker} N$;

Aufgabe 3 Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$, und S deren Spaltenraum.

a) Zeigen Sie, dass es stets einen Isomorphismus

$$i : \mathbb{K}^n / \operatorname{Ker} A \to S$$

gibt.

b) Konstruieren Sie diesen Isomorphismus konkret für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und interpretieren Sie geometrisch.

Aufgabe 4 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie eine Basis des kleinsten Unterraums U von $\mathbb{R}^4$, der den Vektor $(1,0,1,1)$ enthält und für den für alle $u \in U$ gilt:

$$Au \in U.$$

Bestimmen Sie auch eine Basis eines Komplementärraums von U.

Aufgabe 5 Sei A eine quadratische Matrix, sodass $A^2 = A$, S deren Spaltenraum und I die Einheitsmatrix derselben Größe. Zeigen Sie

a) $\operatorname{Ker}(I - A) = S$;

b) $(I - A)^2 = I - A$;