Randwertprobleme

Manuel Kauers
nach einer Vorlesung von
Dr. G. Herzog

21. Oktober 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einführende Beispiele

Bsp.

- Es sei $u(x,t)$ die Auslenkung einer eingespannten *Saite* am Ort $x \in [0,\pi]$ zur Zeit $t \geq 0$. $p > 0$ sei der *Elastizitätsmodul* und $\varrho > 0$ die Dichte des Saitenmaterials. Dann gilt

$$p \cdot u_{xx} = \varrho \cdot u_{tt}, \qquad u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0.$$

Nach geeigneter Normierung (betrachte $v(x,t) := u(x,\tau t)$) kann $\varrho = p = 1$ angenommen werden und man erhält das Randwertproblem

$$u_{xx} = u_{tt}, \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Der *Separationsansatz* $u(x,t) = v(x) \cdot g(t)$ liefert

$$v''(x) \cdot g(t) = v(x) \cdot g''(t).$$

Im Fall $u(x,t) \neq 0$ folgt

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)}.$$

Demnach sind $\frac{v''(x)}{v(x)}$ und $\frac{g''(t)}{g(t)}$ unabhängig von t und x. Es gibt also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} v''(x) &= \lambda \cdot v(x) \qquad (x \in [0,\pi]) \\ g''(t) &= \lambda \cdot g(t) \qquad (t \geq 0). \end{aligned}$$

Die Randbedingung $v(0) \cdot g(t) = v(\pi) \cdot g(t) = 0$ führt im Fall $g \neq 0$ auf $v(0) = v(\pi) = 0$. Diese Bedingungen sind nichttrivial nur für gewisse $\lambda \in \mathbb{R}$ zu erfüllen, da für $\lambda \geq 0$ das Randwertproblem

$$v''(x) = \lambda v(x), \qquad v(0) = v(\pi) = 0 \tag{$*$}$$

nur die triviale Lösung besitzt. Für $\lambda < 0$ erhält man

$$v(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

als Lösungen der Differentialgleichung in $(*)$. Die Randbedingungen fordern $c_1 = 0, c_2 \cdot \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$. Dies ist für $v \neq 0$ genau dann möglich, wenn $\sqrt{-\lambda} = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$, die diese Bedingung erfüllen, heißen *Eigenwerte* des Randwertproblems $(*)$. Die zugehörigen nichttrivialen Lösungen $v_n := \sin(nx)$ heißen *Eigenfunktionen* zu $(*)$ (vgl. S. 24). Für g ergibt sich

$$g(t) = a\cos(nt) + b\sin(nt),$$

so daß die sogenannten *Eigenschwingungen* von der Form

$$u_n(x,t) = \sin(nx) \cdot (a\cos(nt) + b\sin(nt))$$

sind. Hieraus erhält man durch Überlagerung Lösungen u der Form

$$u(x,t) = \sum_n \sin(nx) \cdot (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Es stellt sich die Frage, ob durch Wahl geeigneter a_n und b_n die so gefundenen Lösungen an Anfangsvorgaben $u(x,0) = \varphi(x)$ $(x \in [0,\pi])$ (Auslenkung der Saite zu Beginn) und $u_t(x,0) = \psi(x)$ $(x \in [0,\pi])$ (Geschwindigkeit der Saite zu Beginn) angepaßt werden können.

Dies führt auf die Frage nach einer Darstellung

$$\varphi(x) = \sum_n a_n \sin(nx), \qquad \psi(x) = \sum_n n b_n \cos(nx).$$

- Im Fall, daß nur ein Ende der Saite fest und das andere elastisch mit der Ruhelage verknüpft ist, lauten die Randbedingungen

  $$u(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = -hu(\pi,t) \qquad (t > 0)$$

  für ein festes $h > 0$. Für v erhält man dann

  $$v''(x) = \lambda v(x), \qquad v(0) = 0, v'(\pi) + hv(\pi) = 0.$$

  Aus der zweiten Randbedingung folgt $v(x) = c \sin(\sqrt{-\lambda} x)$ und dies liefert durch Einsetzen in die erste

  $$c \cdot \left(\sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot \pi) + h \cdot \sin(\sqrt{-\lambda} \cdot \pi)\right) = 0.$$

  Dies führt auf die Gleichung

  $$-\frac{\mu}{h} = \tan(\mu\pi) \qquad (\mu := \sqrt{-\lambda} > 0),$$

  die abzählbar viele Lösungen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ hat, aus denen sich die Eigenwerte $\lambda_n = -\mu_n^2$ ergeben. Die zugehörigen Eigenschwingungen lauten dann:

  $$\sin(\mu_n x) \cdot (a \cos(\mu_n t) + \sin(\mu_n t)).$$

- Wirkt auf die Saite zusätzlich eine äußere Kraft $Q(x,t)$, so verändert sich die Bewegungsgleichung zu

  $$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) - Q(x,t), \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

  Q sei von der Form $Q(x,t) = \sum_n Q_n(t) \cdot \sin(nx)$, wobei notwendig

  $$Q_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Q(x,t) \sin(nx) dx.$$

  gilt. Sucht man eine Lösung u von der Form

  $$u(x,t) = \sum_n g_n(t) \sin(nx),$$

  so erhält man

  $$-n^2 g_n(t) = g_n''(t) - Q_n(t).$$

  Eine spezielle Lösung dieser Gleichung ist

  $$\tilde{g}_n(t) := \frac{1}{n} \int_0^t \sin(t-s) Q_n(s) ds$$

  und die allgemeine Lösung lautet somit

  $$g_n(t) = \tilde{g}_n(t) + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

- Sind bei der betrachteten Saite sowohl p als auch ϱ vom Ort x abhängig, so lautet die Bewegungsgleichung

$$(p(x)u_x(x,t))_x = \varrho(x)u_{tt}(x,t).$$

Für homogene Randbedingungen führt der Separationsansatz hier auf

$$\begin{aligned} (pv')'(x) &= \lambda\varrho(x)v(x) \qquad && (x \in [0,\pi]) \\ g''(t) &= \lambda g(t) && (t \geq 0) \end{aligned}$$

mit entsprechenden Randbedingungen an v. Es wird sich zeigen (vgl. Satz 15 auf S. 27), daß das Problem

$$(pv')'(x) = \lambda\varrho(x)v(x), \qquad v(0) = v(\pi) = 0$$

für abzählbar viele $\lambda_n < 0$ mit $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$ nichttriviale Lösungen besitzt und daß wie oben speziell die Eigenschwingungen von der Gestalt

$$u_n(x,t) = v_n(x)\left(a_n\cos(\sqrt{-\lambda_n}t) + b_n\sin(\sqrt{-\lambda_n}t)\right)$$

sind und.

- Die schwingende *Membran*: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Ist an ∂G eine Membran befestigt, so genügen die Schwingungen der über G aufgespannten Membran der Differentialgleichung

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = u_{tt}.$$

Der Separationsansatz $u(x,y,t) = v(x,y)\cdot g(t)$ führt hier auf

$$\begin{aligned} \Delta v(x,y) &= \lambda v(x,y) \quad && ((x,y) \in G), \\ v(x,y) &= 0 && ((x,y) \in \partial G), \\ g''(t) &= \lambda g(t) && (t \geq 0). \end{aligned}$$

Wieder sind Zahlen λ gesucht, für die die obere Gleichung nichttriviale Lösungen besitzt. Wieder sind diese λ negativ und die zugehörigen Eigenschwingungen sind von der Form

$$u(x,y,t) := v(x,y)\cdot\left(a\cos(\sqrt{-\lambda}t) + b\sin(\sqrt{-\lambda}t)\right).$$

Im Fall $G = (0,a)\times(0,b)$, also bei einer rechteckigen Membran, lassen sich die Eigenwerte explizit angeben:

$$\lambda = -\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) \qquad (m,n \in \mathbb{N}).$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen lauten dann

$$v(x,y) = \sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b}).$$

2 Grundlagen aus der Funktionalanalysis

Def. 1 Es sei H ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ $(x, y \in H)$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ $(x, y, z \in H)$
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ $(x, y \in H, \alpha \in \mathbb{K})$
4. $(x, x) \in [0, \infty)$ $(x \in H)$
5. $(x, x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$

heißt *Skalarprodukt* (oder *Innenprodukt*) auf H. Ist $(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt auf H, so heißt $(H, (\cdot, \cdot))$ *Innenproduktraum* (oder *Prä*-HILBERT-*Raum*).

Bem. Skalarprodukte haben folgende Eigenschaften:

- $(0, y) = 0$ $(y \in H)$
- Für jedes feste $y \in H$ ist die Abbildung $A : H \to \mathbb{K}, A(x) := (x, y)$ linear.
- $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$ $(x, y \in H, \alpha \in \mathbb{K})$
- $(z, x + y) = (z, x) + (z, y)$ $(x, y, z \in H)$.

Def. 2 Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein Innenproduktraum. Dann heißt die Abbildung

$$||\cdot|| : H \to \mathbb{R}, \qquad ||x|| := \sqrt{(x, x)}$$

Norm auf H bezüglich $(\cdot, \cdot)$. $(H, ||\cdot||)$ heißt *normierter, linearer Raum.*

Bem. Ist $||\cdot||$ eine Norm auf H, so gilt:

- $|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$ $(x, y \in H)$
- $||x|| \geq 0$ $(x \in H)$ und $||x|| = 0 \iff x = 0$
- $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$ $(x \in H, \alpha \in \mathbb{K})$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ $(x, y \in H)$.

Def. 3 Ist $(H, (\cdot, \cdot))$ ein bezüglich der von $(\cdot, \cdot)$ induzierten Norm vollständiger Innenproduktraum, d.h. konvergiert in H jede CAUCHY-Folge, so heißt H HILBERT-*Raum.* Ein Untervektorraum M von H heißt *Unterraum* von H. M heißt *abgeschlossen*, falls M als Teilmenge des normierten linearen Raumes $(H, ||\cdot||)$ abgeschlossen ist.

Bsp.

- Der Raum $\mathbb{K}^n$ versehen mit dem Standardskalarprodukt ist ein HILBERT-Raum.

- Der Raum $C([0,1],\mathbb{K})$ wird mit dem Skalarprodukt

$$(f,g) := \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

zu einem Innenproduktraum. Er ist jedoch kein HILBERT-Raum. Betrachte dazu die Folge (f_n) mit

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & (x \in [\frac{1}{n}, 1]) \\ \sqrt{n} & (x \in [0, \frac{1}{n})). \end{cases}$$

Dies ist eine CAUCHY-Folge, die in $C([0,1],\mathbb{K})$ nicht konvergiert.

- Der Raum $L^2([a,b],\mathbb{K})$ aller auf $[a,b]$ meßbaren Funktionen f mit

$$\int\limits_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$$

ist ein HILBERT-Raum.

Bem. Ist M ein Unterraum von H, so ist auch $\overline{M}$ ein Unterraum von H.

Def. 4 Seien H ein Innenproduktraum und $x, y \in H$ mit $(x,y) = 0$. Dann heißen x und y aufeinander *senkrecht*. Schreibweise in diesem Fall $x \perp y$. Zu $x \in H$ sei

$$x^\perp := \{y \in H : (x,y) = 0\}.$$

Ist M ein Unterraum von H, so sei

$$M^\perp := \{y \in H : (x,y) = 0 \ (x \in M)\}.$$

Bem. Für jedes $x \in H$ ist $x^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H.

Satz 1 Sei $C \neq \emptyset$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines HILBERT-Raums H. Dann existiert in C genau ein Element kleinster Norm, also

$$\exists_1 \quad x_0 \in C \quad \forall \quad x \in C : \qquad ||x_0|| \leq ||x||.$$

Beweis Es gilt die Parallelogrammgleichung

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 \qquad (x, y \in C),$$

da $||\cdot||$ von einem Skalarprodukt induziert ist. Sei $\alpha := \inf\limits_{x \in C} ||x||$ und $x, y \in C$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}||x-y||^2 = \frac{1}{2}||x||^2 + \frac{1}{2}||y||^2 - ||\frac{x+y}{2}||^2 \leq \frac{1}{2}||x||^2 + \frac{1}{2}||y||^2 - \alpha^2 \\ \Longrightarrow \quad &||x-y||^2 \leq 2||x||^2 + 2||y||^2 - 4\alpha^2, \end{aligned}$$

denn da C konvex ist, gilt mit $x, y \in C$ auch $\frac{x+y}{2} \in C$. Gilt $||x|| = ||y|| = \alpha$, so folgt $||x-y|| = 0$, also $x = y$. Also gibt es höchstens ein Element kleinster Norm.

Es existiert nun eine Folge (x_k) in C mit $||x_k|| \xrightarrow{k\to\infty} \alpha$. Wegen

$$||x_k - x_l||^2 \le (2||x_k||^2 - 2\alpha^2) + (2||x_l||^2 - 2\alpha^2) \qquad (k, l \in \mathbb{N})$$

ist (x_k) eine CAUCHY-Folge. Da H ein HILBERT-Raum ist, konvergiert demnach (x_k). Sei $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k$. Da C abgeschlossen ist, gilt $x_0 \in C$ und weil $||\cdot||$ eine stetige Abbildung ist, folgt

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} ||x_k|| = ||x_0||$$

∎

Satz 2 Sei H ein HILBERT-Raum und M ein Unterraum von H. Dann gilt:

1. Jedes $x \in H$ besitzt eine eindeutig bestimmte Zerlegung $x = Px + Qx$ mit $Px \in M$ und $Qx \in M^\perp$.
2. Px und Qx sind die Elemente kleinsten Abstands zu x in M bzw. $M^\perp$.
3. Die Abbildungen $P : H \to M$ und $Q : H \to M^\perp$ sind linear.
4. $||x||^2 = ||Px||^2 + ||Qx||^2$ $(x \in H)$.

Beweis

1. Seien $x_1, x_2 \in M, y_1, y_2 \in M^\perp$. Wegen $M \cap M^\perp = \{0\}$ gilt

   $$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \implies x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \implies x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

   Damit gibt es höchstes eine gewünschte Zerlegung. Sei $x \in H$ fest. Wir betrachten die abgeschlossene, konvexe Menge

   $$x + M := \{x + y : y \in M\}.$$

   Sei Qx das Element kleinster Norm in $x+M$. Die Existenz von Qx ist durch Satz 1 gesichert. Weiter sei $Px := x - Qx$. Wegen $Qx \in x + M$ ist $Px \in M$ $(x \in H)$. Sei $y \in M$ mit oBdA $||y|| = 1$ und $z = Qx$. Dann gilt für $\alpha \in \mathbb{C}$:

   $$\begin{aligned}(z, z) = ||z||^2 \le ||\underbrace{z - \alpha y}_{\in x+M}||^2 &= (z - \alpha y, z - \alpha y)\\ &= ||z||^2 - \overline{\alpha}(z, y) - \alpha(y, z) + |\alpha|^2 \underbrace{||y||^2}_{=1}\\ \implies \quad 0 \le -\alpha(y, z) - \overline{\alpha(z, y)} + |\alpha|^2. \end{aligned}$$

   Für das spezielle $\alpha = (z, y)$ folgt $0 \le -|(z, y)|^2$ und damit $(z, y) = 0$. Weil $y \in M$ beliebig und $z = Qx$ war, gilt damit $Qx \in M^\perp$ $(x \in H)$.
2. Es gilt $Px \in M$. Für $y \in M$ gilt

   $$||x - y||^2 = ||\underbrace{Qx}_{\in M^\perp} + \underbrace{(Px - y)}_{\in M}||^2 = ||Qx||^2 + ||Px - y||^2.$$

   Damit ist $||x - y||^2$ minimal im Fall $y = Px$, d.h. Px ist das Element kleinsten Abstands zu x in M. Analoges gilt für Qx.

3. Seien $x, y \in H$. Nach 1. gilt dann:

$$\begin{aligned} x &= Px + Qx, \\ y &= Py + Qy, \\ \alpha x + \beta y &= P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y). \end{aligned}$$

   Addition und Umstellung dieser Gleichungen liefert

$$\underbrace{\underbrace{P(\alpha x + \beta y) - \alpha Px - \beta Py}_{\in M} = \underbrace{\alpha Qx + \beta Qy - Q(\alpha x + \beta y)}_{\in M^\perp}}_{\in M \cap M^\perp = \{0\}}$$

   Damit gilt $P(\alpha x + \beta y) = \alpha Px + \beta Py$ und $Q(\alpha x + \beta y) = \alpha Qx + \beta Qy$ und somit sind P und Q linear.

4. Folgt aus $Px \perp Qx$.

■

Bem. Ist $M \neq H$ ein abgeschlossener Unterraum von H, so existiert ein $y \neq 0$ mit $y \perp M$.

Satz 3 Sei H ein HILBERT-Raum und $L : H \to \mathbb{K}$ ein stetiges Funktional. Dann existiert genau ein $y \in H$ mit $Lx = (x, y)$ $(x \in H)$.

Beweis Für $L = 0$ setze $y = 0$. Sei $L \neq 0$. Wir betrachten

$$M := \text{Kern}\, L = \{x \in H : Lx = 0\}.$$

Da L linear und stetig ist, ist M ein abgeschlossener Unterraum von H. Wegen $L \neq 0$ ist $M \neq H$ und $M^\perp \neq \{0\}$. Also existiert ein $z \in M^\perp$ mit $||z|| = 1$. Sei $x \in H$ beliebig und $u := (Lx)z - (Lz)x$. Wegen

$$Lu = (Lx)(Lz) - (Lz)(Lx) = 0$$

gilt $u \in M$, also $(u, z) = 0$. Damit gilt

$$Lx = (Lx) \cdot (z, z) = (Lz)(x, z) \qquad (x \in H).$$

Für $y := \overline{(Lz)} \cdot z$ gilt also das gewünschte.

Eindeutigkeit: Ist $\tilde{y} \in H$ ein weiteres Element mit $Lx = (x, \tilde{y})$ $(x \in H)$, dann gilt

$$(x, y - \tilde{y}) = 0 \ (x \in H) \quad \Longrightarrow \quad (y - \tilde{y}, y - \tilde{y}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \tilde{y}.$$

■

Bem. Dies gilt i.A. nicht mehr, wenn H kein HILBERT-Raum ist. Betrachte $H := C([0, 1], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

und die Funktion

$$\varphi : H \to H, \qquad \varphi(f) := \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt.$$

Die Abbildung φ ist linear und stetig. Jedoch gibt es keine Funktion $g \in H$ mit

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt = \varphi(f) = (f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Def. 5 Es sei H ein Innenproduktraum. Eine Menge $U := \{u_j, j \in J\} \subseteq H$ heißt *Orthogonalsystem*, falls für $j \neq k$ gilt $(u_k, u_j) = 0$. Ist U ein Orthogonalsystem und gilt zusätzlich $||u|| = 1$ $(u \in U)$, so heißt U *Orthonormalsystem*. Sei U ein Orthonormalsystem. Zu $x \in H$ heißen die Zahlen (x, u) $(u \in U)$ FOURIER-*Koeffizienten* bezüglich U. U heißt *maximal*, falls es keine echte Obermege von U gibt, die ebenfalls Orthonormalsystem ist. U heißt *Orthonormalbasis*, falls gilt

$$x = \sum_{j \in J} (x, u_j) u_j \qquad (x \in H).$$

Bem. Ein Orthogonalsystem ist stets eine linear unabhängige Menge.

Satz 4 Es sei H ein Innenproduktraum und $\{u_j, j \in J\}$ ein Orthonormalsystem. Weiter sei F eine endliche Teilmenge von J und M_F die lineare Hülle von $\{u_j, j \in F\}$. Dann gilt

1. Ist $\varphi : J \to \mathbb{K}$ eine Funktion mit $\varphi(j) = 0$ $(j \neq F)$ und

   $$y = \sum_{j \in F} \varphi(j) u_j,$$

   so gilt $(y, u_j) = \varphi(j)$ $(j \in J)$ und $||y||^2 = \sum_{j \in F} |\varphi(j)|^2$.

2. Sei $x \in H$ und $s_F(x) := \sum_{j \in F} (x, u_j) \cdot u_j$. Dann gilt

   $$||x - s_F(x)|| < ||x - s|| \qquad (s \in M_F \setminus \{s_F(x)\})$$

   und

   $$\sum_{j \in F} |(x, u_j)|^2 \leq ||x||^2.$$

Beweis

1. $(y, u_i) = (\sum_{j\in F} \varphi(j) u_j, u_i) = \sum_{j\in F} \varphi(j) \underbrace{(u_j, u_i)}_{=\delta_{ij}} = \varphi(i).$

$$\begin{aligned}
||y||^2 = (y,y) &= (\sum_{j\in F} \varphi(j) u_j, \sum_{i\in F} \varphi(i) u_i) \\
&= \sum_{j\in F} \varphi(j) \sum_{i\in F} \overline{\varphi(i)} \underbrace{(u_j, u_i)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{j\in F} \varphi(j)\overline{\varphi(j)} \\
&= \sum_{j\in F} |\varphi(j)|^2.
\end{aligned}$$

2. Für $j \in F$ gilt

$$\begin{aligned}
& (s_F(x), u_j) = (x, u_j) \\
\Longrightarrow\quad & (x - s_F(x), u_j) = 0 \\
\Longrightarrow\quad & x - s_F(x) \perp u_j \\
\Longrightarrow\quad & x - s_F(x) \perp \underbrace{s_F(x) - s}_{\in M_F} \qquad (s \in M_F) \\
\Longrightarrow\quad & ||x - s||^2 = ||x - s_F(x) + (s_F(x) - s)||^2 \\
& \qquad = ||x - s_F(x)||^2 + ||s_F(x) - s||^2 \\
& \qquad > ||x - s_F(x)||^2 \qquad (s \in M_F \setminus \{s_F(x)\}).
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$||x - s_F(x)|| < ||x - s|| \qquad (s \in M_F \setminus \{s_F(x)\}).$$

Für $s = 0$ folgt

$$||x||^2 \geq ||s_F(x)||^2 = \sum_{j\in F} |(x, u_j)|^2 \qquad (x \in H).$$

■

Def. 6 Sei J eine beliebige Indexmenge ($|J| = \infty$ zugelassen) und $\varphi : J \to [0, \infty)$ eine Funktion. Dann sei

$$\sum_{j\in J} \varphi(j) := \sup_{\substack{F\subseteq J \\ |F|<\infty}} \sum_{j\in F} \varphi(j).$$

Mit $l^2(J) := l^2(J, \mathbb{K})$ sei der Raum aller Funktionen $\varphi : J \to \mathbb{K}$ bezeichnet, für die gilt

$$\sum_{j\in J} |\varphi(j)|^2 < \infty$$

Bem.

- Für $\varphi \in l^2(J)$ ist $\{j \in J : \varphi(j) \neq 0\}$ nicht überabzählbar.

- Auf $l^2(J)$ wird durch

$$(\cdot,\cdot) : l^2(J) \times l^2(J) \to \mathbb{K}, \qquad (\varphi, \psi) := \sum_{j \in J} \varphi(j)\overline{\psi(j)}$$

ein Skalarprodukt definiert.

Satz 5 $l^2(J)$ ist ein HILBERT-Raum.

Beweis Sei (φ_n) eine CAUCHY-Folge in $l^2(J)$. Für $j_0 \in J$ ist $(\varphi_n(j_0))$ wegen

$$|\varphi_n(j_0) - \varphi_m(j_0)|^2 \leq \sum_{j \in J} |\varphi_n(j) - \varphi_m(j)|^2 = ||\varphi_n - \varphi_m||^2$$

eine CAUCHY-Folge in $\mathbb{K}$, also insbesondere konvergent. Damit wird durch

$$\psi : J \to \mathbb{K}, \qquad \psi(j) := \lim_{n \to \infty} \varphi_n(j)$$

eine Funktion definiert.

Sei $c > 0$ mit $||\varphi_n|| < c$ $(n \in \mathbb{N})$ und $F \subseteq J$ endlich. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in F} |\varphi_n(j)|^2 \leq ||\varphi_n||^2 \leq c^2 \qquad (n \in \mathbb{N}) \\ \Longrightarrow \quad & \sum_{j \in F} |\psi(j)|^2 \leq c^2 < \infty \\ \Longrightarrow \quad & \psi \in l^2(J). \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $||\varphi_n - \varphi_m||^2 < \varepsilon$ $(n, m \geq n_0)$. Dann gilt für $n, m \geq n_0$:

$$\sum_{j \in F} |\varphi_n(j) - \varphi_m(j)|^2 < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j \in F} |\varphi_n(j) - \psi(j)|^2 \leq \varepsilon.$$

Da F beliebig war, folgt

$$||\varphi_n - \psi||^2 = \sum_{j \in J} |\varphi_n(j) - \psi(j)|^2 \leq \varepsilon \qquad (n \geq n_0).$$

Damit ist $l^2(J)$ abgeschlossen. Daraus folgt die Behauptung. ■

Satz 6 Sei H ein Innenproduktraum und $U := \{u_j : j \in J\} \subseteq H$ ein Orthonormalsystem. M sei die lineare Hülle von U. Dann gilt

$$\sum_{j \in J} |(x, u_j)|^2 \leq ||x||^2 \qquad (x \in H).$$

Die Abbildung

$$\Phi : H \to l^2(J), \qquad \Phi(x) := ((x, u_j))_{j \in J}$$

ist linear und stetig. $\Phi|_{\overline{M}}$ ist normerhaltend und somit injektiv. Ist H ein HILBERT-Raum, so ist $\Phi|_{\overline{M}}$ zusätzlich surjektiv.

Beweis Nach Satz 4 gilt

$$\sum_{j \in F} |(x, u_j)|^2 \leq ||x||^2 \qquad (x \in H)$$

für jede endliche Teilmenge $F \subseteq J$. Nach Definition gilt damit bereits

$$\sum_{j \in J} |(x, u_j)|^2 \leq ||x||^2 \qquad (x \in H).$$

Betrachte

$$\Phi : H \to l^2(J), \qquad \Phi(x) := ((x, u_j))_{j \in J}.$$

Sei $||\cdot||_2$ die Norm auf $l^2(J)$ und $||\cdot||$ die Norm auf H. Wegen

$$||\Phi(x) - \Phi(y)||_2 \leq ||x - y|| \qquad (x, y \in H)$$

ist Φ stetig. Die Linearität von Φ ist offensichtlich.

Für jedes $x \in M$ existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ mit $(x, u_j) = 0$ $(j \notin F)$. Damit gilt für $x \in M$:

$$||\Phi(x)||_2^2 = ||((x, u_j))_{j \in J}||_2^2 = \sum_{j \in F} |(x, u_j)|^2 = ||\sum_{j \in F} (x, u_j) \cdot u_j|| = ||x||^2.$$

Damit ist Φ auf $\overline{M}$ normerhaltend.

Die Menge aller $\varphi \in l^2(J)$ mit $|\{j \in J : \varphi(j) \neq 0\}| < \infty$ liegt dicht in $l^2(J)$, weshalb sie nach Satz 4.1 in $\Phi(M)$ liegt.

Sei nun H ein Hilbert-Raum und (x_n) eine Folge in M mit

$$\Phi(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} \psi \in l^2(J).$$

Dann ist $(\Phi(x_n))$ eine Cauchy-Folge in H. Damit ist (x_n) konvergent, etwa gegen x_0. Aus der Stetigkeit von Φ folgt $\Phi(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} \Phi(x_0)$, also $\Phi(x_0) = \psi$. Damit ist $\Phi : \overline{M} \to l^2(J)$ surjektiv. ∎

Satz 7 Es sei $\{u_j, j \in J\}$ ein Orthonormalsystem eines Innenproduktraums H. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\{u_j : j \in J\}$ ist eine Orthonormalbasis.
2. $\sum_{j \in J} |(x, u_j)|^2 = ||x||^2$ $(x \in H)$.

Ist H ein Hilbert-Raum, so sind die obigen Aussagen zusätzlich äquivalent zu

3. $\{u_j, j \in J\}$ ist maximal.
4. Die lineare Hülle M von $\{u_j : j \in J\}$ liegt dicht in H.

Beweis 1. $\Rightarrow$ 2. Ist $\{u_j, j \in J\}$ eine Orthonormalbasis, so gilt

$$||x||^2 = ||\sum_{j \in J} (x, u_j) u_j||^2 = \sum_{j \in J} |(x, u_j)|^2 \qquad (x \in H).$$

2. $\Rightarrow$ 1. Sei $x \in H$. Wir betrachten diejenigen u_j mit $(x, u_j) \neq 0$. Dies sind höchstens abzählbar viele, etwa $u_1, u_2, \ldots$. Es gilt

$$||x - \sum_{k=1}^{n} (x, u_k) u_k||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, u_k)|^2 \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Damit gilt $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x, u_k) u_k$.

Sei H ein HILBERT-Raum. $\{u_j, j \in J\}$ ist genau dann maximal, wenn kein $u \in H$, $||u|| = 1$ existiert, so daß $\{u_j : j \in J\} \cup \{u\}$ ein Orthonormalsystem ist.

3. $\Rightarrow$ 4. Angenommen, $\overline{M} \neq H$. Dann ist $M^\perp \neq \{0\}$. Dann existiert also ein $u \in M^\perp$, $||u|| = 1$. Dann ist aber $\{u_j : j \in J\} \cup \{u\}$ ein Orthonormalsystem im Widerspruch zur Maximalität von $\{u_j : j \in J\}$.

4. $\Rightarrow$ 2. Mit $\overline{M} = H$ folgt aus Satz 6

$$||\Phi(x)||_2^2 = \sum_{j \in J} |(x, u_j)|^2 = ||x||^2 \qquad (x \in H).$$

2. $\Rightarrow$ 3. Angenommen, $\{u_j, j \in J\}$ ist nicht maximal. Dann existiert ein $u \in H$ mit $||u|| = 1$ und $(u, u_j) = 0$ $(j \in J)$. Dies führt wegen

$$1 = ||u||^2 = \sum_{j \in J} |(u, u_j)|^2 = 0$$

zum Widerspruch. ∎

Bem. Ist H ein HILBERT-Raum und $\{u_j, j \in J\}$ eine Orthonormalbasis, so ist die Funktion

$$f : H \to l^2(J), \qquad f(x) := ((x, u_j))_{j \in J}$$

stetig, normerhaltend, linear und bijektiv. Eine stetige, lineare, bijektive Abbildung zwischen zwei HILBERT-Räumen heißt *Isomorphismus*. Man bezeichnet H und $l^2(J)$ daher auch als *isomorph*. Mit Hilfe des ZORNschen Lemmas läßt sich zeigen, daß jeder Innenproduktraum $H \neq \{0\}$ ein maximales Orthonormalsystem und damit insbesondere eine Orthonormalbasis besitzt. Somit ist jeder Hilbertraum H isomorph zu einem Raum $l^2(J)$. Man kann weiter zeigen, daß die Mächtigkeit von J eindeutig bestimmt ist.

3 Stetige, selbstadjungierte, kompakte Operatoren

In diesem Abschnitt sei H ein Innenproduktraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $T : H \to H$ ein linearer *Operator*.

Bem. T ist genau dann stetig, wenn die Menge

$$\{||Tx|| : x \in H, ||x|| = 1\}$$

beschränkt ist. In diesem Fall bezeichnet man

$$|||T||| := \sup_{\substack{x \in H \\ ||x||=1}} ||Tx||$$

als *Operatornorm* von T. Es gilt

$$||Tx|| \leq |||T||| \cdot ||x|| \qquad (x \in H).$$

Def. 7 T heißt *selbstadjungiert* (oder *hermitesch*), falls T linear und stetig ist und gilt

$$(Tx, y) = (x, Ty) \qquad (x, y \in H).$$

T heißt *kompakt*, falls für jede in H beschränkte Folge (x_n) eine in H konvergente Teilfolge von (Tx_n) existiert.

Bem. Ist $T : H \to H$ linear und kompakt, so ist T stetig.

Satz 8 Ist $T : H \to H$ selbstadjungiert, so gilt $|||T||| = \sup_{\substack{x \in H \\ ||x||=1}} |(Tx, x)|$

Beweis Sei $\beta := \sup_{\substack{x \in H \\ ||x||=1}} |(Tx, x)|$. Dann gilt $|(Tx, x)| \leq \beta ||x||^2$ $(x \in H)$. Für $x \in H$ mit $||x|| = 1$ folgt aus der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung

$$|(Tx, x)| \leq ||Tx|| \cdot ||x|| = ||Tx|| \leq |||T||| \cdot ||x|| = |||T|||.$$

Damit gilt $\beta \leq |||T|||$. Für beliebige $x, y \in H$ gilt weiter

$$(Tx + Ty, x + y) - (Tx - Ty, x - y) = 2(Tx, y) + 2(Ty, x).$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}(Tx + Ty, x + y) - (Tx - Ty, x - y) &\leq \beta ||x + y||^2 + \beta ||x - y||^2 \\ &= 2\beta(||x||^2 + ||y||^2).\end{aligned}$$

Sei $z \in H$ mit $||z|| = 1$. Setzen wir $x = ||Tz||z$ und $y = Tz$, so gilt

$$2(Tx, y) + 2(Ty, x) = 2||Tz||(Tz, Tz) + 2||Tz||(T^2 z, z) = 4||Tz||^3.$$

Daraus folgt:

$$4||Tz||^3 \leq \beta(||Tz||^2 + ||Tz||^2) = 4\beta ||Tz||^2,$$

also $||Tz|| \leq \beta$ $(z \in H, ||z|| = 1)$ und damit $|||T||| \leq \beta$. Insgesamt gilt also $|||T||| = \beta$. ∎

Def. 8 Sei H ein Innenproduktraum über $\mathbb{C}$ und $T : H \to H$ linear und stetig. Dann heißt

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \,\mathrm{id} \text{ ist nicht bijektiv}\}$$

das *Spektrum* von T.

Bem. Ist $\dim H < \infty$, so ist $\sigma(T)$ gerade die Menge der Eigenwerte von T. Im allgemeinen Fall ist $\sigma(T)$ nur eine Obermenge der Menge aller Eigenwerte. Wie üblich heißt λ *Eigenwert* von T, falls gilt:

$$\exists \quad x \in H \setminus \{0\} : \qquad Tx = \lambda x.$$

Bsp. Betrachte $H := C([a,b], \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$(f,g) := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

und den Operator

$$T : H \to H, \qquad (Tf)(t) := \int_a^t f(s)ds.$$

T ist stetig: Für $f \in H$ gilt:

$$\begin{aligned} ||Tf||^2 &= \int_a^b |(Tf)(t)|^2 dt = \int_a^b |\int_a^t f(s)ds|^2 dt \\ &\le \int_a^b \left(\int_a^b |f(s)|ds \right)^2 dt = (b-a) \left(\int_a^b |f(s)|ds \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad ||Tf|| &\le \sqrt{b-a} \int_a^b 1|f(s)|ds = \sqrt{b-a} \cdot (1, |f|) \\ &\le \sqrt{b-a} \cdot ||1|| \cdot || \, |f| \, || = (\sqrt{b-a}||1||)||f||. \end{aligned}$$

Es gilt $0 \in \sigma(T)$, da T nicht surjektiv ist. 0 ist aber kein Eigenwert von T: Angenommen, $f \in H \setminus \{0\}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Dann wäre

$$Tf = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \ t \in [a,b] : \int_a^t f(s)ds = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0.$$

Widerspruch!

Bem. Ist $T : H \to H$ stetig, linear und selbstadjungiert und ist λ ein Eigenwert von T, dann ist λ reell.

Satz 9 Sei $T : H \to H$ ein kompakter, linearer, selbstadjungierter Operator. Dann existiert ein Eigenwert λ_0 von T mit $|\lambda_0| = |||T|||$.

Beweis Für $T = 0$ ist die Aussage trivial. Sei $T \neq 0$. Es sei (x_n) eine Folge in H mit $||x_n|| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und $|(Tx_n, x_n)| \xrightarrow{n \to \infty} |||T|||$. Da T kompakt ist, hat (Tx_n) eine konvergente Teilfolge (Tx_{n_k}). Deren Grenzwert sei $z \in H$.

(Tx_{n_k}) läßt sich so wählen, daß auch $((Tx_{n_k}, x_{n_k}))$ konvergiert, etwa gegen λ_0. Dann gilt:

$$\begin{aligned}||Tx_{n_k} - \lambda_0 x_{n_k}||^2 &= ||Tx_{n_k}||^2 - 2\lambda_0(Tx_{n_k}, x_{n_k}) + |\lambda_0|^2 \\ &\leq 2|\lambda_0|^2 - 2\lambda_0(Tx_{n_k}, x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Demnach gilt also $\lambda_0 x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} z$. Wegen $\lambda_0 \neq 0$ folgt $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_0}z$ und damit $Tx_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_0}Tz$. Setzt man also $x_0 = \frac{1}{\lambda_0}z$, so gilt $||x_0|| = 1$, $|\lambda_0| = |||T|||$ und $Tx_0 = \lambda_0 x_0$. ∎

Bem. Ist x_0 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_0 aus obigem Satz und gilt $||x_0|| = 1$, so ist

$$|||T||| = |\lambda_0| = |(Tx_0, x_0)| = \sup_{\substack{x\in H\\ ||x||=1}} |(Tx, x)|.$$

Das Supremum ist also ein Maximum. Ist λ irgendein Eigenwert von T mit einem Eigenvektor x, $||x|| = 1$, so gilt

$$|\lambda| = |(Tx, x)| \leq |||T|||$$

Satz 10 Sei H ein unendlich dimensionaler Innenproduktraum und $T : H \to H$ ein selbstadjungierter, kompakter Operator. 0 sei kein Eigenwert von T. Dann existieren Folgen $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $(u_n)_{n=1}^\infty$ in H mit folgenden Eigenschaften:

1. $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
2. $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ sind genau die Eigenwerte von T und u_n ist ein Eigenvektor zu λ_n.
3. $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ ist ein maximales Orthonormalsystem.
4. $Tu = \sum_{n=1}^{\infty}(Tu, u_n)u_n$ $(u \in H)$
5. Ist zusätzlich H ein Hilbert-Raum, so ist $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis, d.h. es gilt

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, u_n)u_n \qquad (x \in H)$$

Beweis Weil 0 kein Eigenwert von T ist, kann es keinen Unterraum $M \neq \{0\}$ von H geben mit $T|_M = 0$. Daher ist folgende Konstruktion möglich: $M_1 := H$. Nach Satz 9 existiert ein Eigenwert λ_1 von T und ein zugehöriger Eigenvektor u_1 mit $||u_1|| = 1$ und

$$0 \neq |\lambda_1| = |(Tu_1, u_1)| = \sup_{\substack{x\in M_1\\ ||x||=1}} |(Tx, x)| = |||T|||.$$

Setze nun $M_2 := [u_1]^\perp$. Dann ist M_2 ein abgeschlossener Unterraum von M_1 und T bildet M_2 in sich ab. Nach Satz 9 existiert wieder ein Eigenwert λ_2 von $T|_{M_2}$ und ein zugehöriger Eigenvektor $u_2 \in M_2$ mit $||u_2|| = 1$ und

$$0 \neq |\lambda_2| = |(Tu_2, u_2)| = \sup_{\substack{x\in M_2\\ ||x||=1}} |(Tx, x)| = |||T|_{M_2}|||.$$

Offensichtlich ist $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$. Im n-ten Schritt setzt man allgemein $M_{n+1} = [u_1, \ldots, u_n]^\perp$ und erhält wie oben λ_{n+1} und u_{n+1}.

Durch vollständige Induktion entstehen so Folgen $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ und $(u_n)_{n=1}^\infty$ mit $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ $(n \in \mathbb{N})$, λ_n ist Eigenwert zu u_n $(n \in \mathbb{N})$ und $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ ist ein Orthonormalsystem.

Wir zeigen nun $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $c > 0$ mit $|\lambda_n| > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Die Folge (v_n) mit $v_n := \frac{1}{\lambda_n} u_n$ wäre dann beschränkt und es gälte

$$Tv_n = T(\frac{1}{\lambda_n} u_n) = u_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Da T kompakt ist, hätte $(Tv_n) = (u_n)$ eine konvergente Teilfolge. Dies steht im Widerspruch zu

$$||u_n - u_m|| = \sqrt{2} \qquad (m \neq n).$$

Zu 4.: Sei $x \in H$ fest und $y_n := x - \sum_{j=1}^{n-1} (x, u_j) u_j$. Wegen

$$(y_n, u_{j_0}) = (x, u_{j_0}) - (\sum_{j=1}^{n-1} (x, u_j) u_j, u_{j_0}) = (x, u_{j_0}) - (x, u_{j_0}) = 0$$

$(j_0 = 1, \ldots, n-1)$ gilt $y_n \in M_n = [u_1, \ldots, u_{n-1}]^\perp$. Damit gilt

$$||Ty_n|| \leq |||T|_{M_n}||| \cdot ||y_n|| \leq |\lambda_n| \cdot ||y_n|| \leq |\lambda_n| \cdot ||x|| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned} Ty_n &= Tx - \sum_{j=1}^{n-1} (x, u_j) \lambda_j u_j = Tx - \sum_{j=1}^{n-1} (x, \lambda_j u_j) u_j \\ &= Tx - \sum_{j=1}^{n-1} (x, Tu_j) u_j = Tx - \sum_{j=1}^{n-1} (Tx, u_j) u_j \end{aligned}$$

folgt damit 4.

Zu 2. bleibt nun noch zu zeigen, daß es außer den λ_n $(n \in \mathbb{N})$ keine weiteren Eigenwerte gibt. Angenommen, $\mu \notin \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist ein Eigenwert von T und v mit $||v|| = 1$ ist ein Eigenvektor von μ. Dann gilt:

$$v = T(\frac{1}{\mu} v) = \sum_{n=1}^\infty (T(\frac{1}{\mu} v), u_n) u_n = \sum_{n=1}^\infty (v, u_n) u_n.$$

Andererseits gilt:

$$0 = (Tv, u_n) - (v, Tu_n) = (\mu v, u_n) - (v, \lambda_n u_n) = \underbrace{(\mu - \lambda_n)}_{\neq 0} (v, u_n)$$

$$\Longrightarrow \qquad (v, u_n) = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Widerspruch!

$\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist ein maximales Orthonormalsystem: Wenn nicht, dann gäbe es ein $v \in H$ mit $||v|| = 1$, so daß $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{v\}$ ein Orthonormalsystem ist. Setze also $M_\infty := \{u_n, n \in \mathbb{N}\}^\perp \neq \{0\}$ (da $v \in M_\infty$). Wie zu Beginn folgt die Existenz eines Eigenwertes λ_∞ und eines Eigenvektors u_∞ mit $||u_\infty|| = 1$ und

$$0 \neq |\lambda_\infty| = |(Tu_\infty, u_\infty)| = \sup_{\substack{x \in M_\infty \\ ||x||=1}} |(Tx, x)| = |||T|_{M_\infty}|||.$$

Damit gilt $|\lambda_\infty| \leq |\lambda_n|$ $(n \in \mathbb{N})$, also $\lambda_\infty = 0$ Widerspruch!

5. folgt aus dem bisher gezeigten mit Hilfe von Satz 7. ∎

4 Sturmsche Randwertaufgaben

Es seien $r, p, q \in C([a, b], \mathbb{R})$ mit $p > 0$ auf $[a, b]$. Wir betrachten den selbstadjungierten, linearen *Differentialoperator* L, definiert durch

$$Lu := (p \cdot u')' + q \cdot u.$$

Für $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$ und $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$ heißen die Ausdrücke

$$R_a u = \alpha_0 u(a) + \alpha_1 p(a) u'(a)$$
$$R_b u = \beta_0 u(a) + \beta_1 p(b) u'(b)$$

Randoperatoren. Das Problem, zu gegebenen r, η_a, η_b Funktionen $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$(Lu)(x) = r(x), \qquad R_a u = \eta_a, R_b u = \eta_b \tag{$*$}$$

zu finden, heißt Sturm*sche Randwertaufgabe*. Eine Funktion $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Lösung*, falls u zweimal stetig differenzierbar ist und $(*)$ erfüllt. Im Fall $r = 0$, $\eta_a = \eta_b = 0$ spricht man vom zu $(*)$ gehörigen *homogenen* Randwertproblem.

Bsp. Sei $p = 1, q = 0, r(x) = x$ und $[a, b] = [0, 1]$. Weiter seien $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ und $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Dann hat $(*)$ die Form

$$u''(x) = x \qquad u(0) = \eta_0, u(1) = \eta_1.$$

Eine Lösung der Differentialgleichung ist

$$u(x) = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2.$$

Durch Wahl von $c_1 = \eta_1 - \eta_0 - \frac{1}{6}, c_2 := \eta_0$ erhält man eine Lösung des Randwertproblems.

Bem. Seien $a_0, a_1, r \in C([a, b], \mathbb{R})$. Jedes Randwertproblem der Form

$$u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) = r(x),$$
$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \eta_a,$$
$$\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \eta_b$$

läßt sich auf die Form $(*)$ transformieren. Dazu setzt man

$$p(x) = \exp(\int_a^x a_1(t)dt).$$

Dann gilt $(u \in C^2([a,b],\mathbb{R}))$

$$\begin{aligned}(pu')' + \underbrace{pa_0}_{=:q} u &= p' \cdot u' + p \cdot u'' + pa_0 u \\ &= p \cdot a_1 \cdot u' + p \cdot u'' + p \cdot a_0 \cdot u \\ &= p \cdot (u'' + a_1 \cdot u' + a_0 \cdot u).\end{aligned}$$

Da die Differenz zweier Lösungen von $(*)$ das zugehörige homogene Randwertproblem löst, ist die Gesamtheit aller Lösungen von $(*)$ gegeben durch

$$u = u_s + u_h,$$

wobei u_s irgendeine feste Lösung von $(*)$ ist und u_h alle Lösungen des zugehörigen homogenen Randwertproblems durchläuft.

Sei nun u eine Lösung der Differentialgleichung $(Lu)(x) = r(x)$. Setzt man $y_1(x) = p(x)u'(x)$ und $y_2(x) = u(x)$, so ist

$$\begin{aligned}y_1'(x) &= (p \cdot u')'(x) = -q(x) \cdot y_2(x) + r(x) \\ y_2'(x) &= u'(x) = \frac{y_1(x)}{p(x)}.\end{aligned}$$

Es gilt: $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lösung von $(Lu)(x) = r(x)$, wenn

$$\begin{pmatrix} pu' \\ u \end{pmatrix} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$$

das lineare System

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -q(x) \\ \frac{1}{q(x)} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r(x) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

löst. Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme folgt, daß die Gleichung $(Lu)(x) = 0$ zwei linear unabhängige Lösungen

$$u_1, u_2 : [a,b] \to \mathbb{R},$$

also ein Fundamentalsystem besitzt. Jede Lösung $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ von $(Lu)(x) = 0$ ist damit von der Form

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

für geeignete Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Satz 11 Das Randwertproblem $(*)$ ist genau dann für jede Wahl von r, η_a, η_b eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung $u = 0$ hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn für ein Fundamentalsystem $\{u_1, u_2\}$ gilt

$$\begin{vmatrix} R_a u_1 & R_a u_2 \\ R_b u_1 & R_b u_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Beweis Sei $u_s : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung von $(Lu)(x) = r(x)$ und $\{u_1, u_2\}$ ein Fundamentalsystem von $(Lu)(x) = 0$. Dann hat jede Lösung von $(Lu)(x) = r(x)$ die Form

$$u(x) = u_s(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

für gewisse $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} & R_a u = \eta_a, \quad R_b u = \eta_b \\ \iff\quad & R_a u_s + c_1 R_a u_1 + c_2 R_a u_2 = \eta_a, \\ & R_b u_s + c_1 R_b u_1 + c_2 R_b u_2 = \eta_b. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn gilt

$$\begin{vmatrix} R_a u_1 & R_a u_2 \\ R_b u_1 & R_b u_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

wenn also

$$\begin{aligned} c_1 R_a u_1 + c_2 R_a u_2 = 0 \\ c_1 R_b u_1 + c_2 R_b u_2 = 0 \end{aligned}$$

nur trivial lösbar ist, also genau dannn, wenn das zugehörige Randwertproblem nur trivial lösbar ist. ■

Bsp. Betrachte das Randwertproblem

$$u''(x) + u(x) = 1, \qquad u(0) = \eta_0, u(\pi) = \eta_\pi.$$

Lösungen von $u'' + u = 0$ sind die Funktionen

$$u : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Es gilt

$$u(0) = 0 \iff c_1 = 0 \iff u(\pi) = 0.$$

Damit besitzt das homogene Randwertproblem

$$u''(x) + u(x) = 0, \qquad u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

die Lösungen $u(x) = c \cdot \sin x$ ($c \in \mathbb{R}$). Betrachten wir nun das Randwertproblem

$$u''(x) + u(x) = 1, \qquad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$u(x) = 1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Wegen

$$\begin{aligned} u(0) = 0 &\iff 1 + c_1 = 0 \\ u(\pi) = 0 &\iff 1 - c_1 = 0 \end{aligned}$$

ist das Randwertproblem nicht lösbar.

Bem. Ist $A : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig und $Y : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ Matrixlösung von

$$Y'(x) = A(x) \cdot Y(x),$$

so gilt für die WRONSKI-Determinante $w(x) := \det Y(x)$ die Differentialgleichung

$$w'(x) = (\operatorname{Spur} A(x)) \cdot w(x),$$

also

$$w(x) = w(x_0) \cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} (\operatorname{Spur} A(s))ds} \qquad (x \in [a,b])$$

für ein festes $x_0 \in [a,b]$. Insbesondere folgt aus $\operatorname{Spur} A(x) = 0$ $(x \in [a,b])$, daß w konstant ist. Diese Überlegung angewandt auf

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -q(x) \\ \frac{1}{p(x)} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

liefert für je zwei Lösungen $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ von $(Lu)(x) = 0$ ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$p(x) \cdot v'(x) \cdot u(x) - p(x) \cdot u'(x) \cdot v(x) = c \qquad (x \in [a,b]).$$

Es gilt: u und v bilden genau dann ein Fundamentalsystem von $(Lu)(x) = 0$, wenn $c \neq 0$ gilt.

5 Die GREENsche Funktion eines Randwertproblems

In diesem Abschnitt sei $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ ein bekanntes Fundamentalsystem von $(Lw)(x) = 0$. Gesucht ist eine Lösung von $(Lw)(x) = r(x)$. Bekanntlich existiert ein $c \neq 0$ mit

$$u(x) \cdot v'(x) - u'(x) \cdot v(x) = \frac{c}{p(x)} \qquad (x \in [a,b]).$$

Für jedes $t \in [a,b]$ ist dann

$$w_t(x) := \frac{1}{c} \cdot (u(t) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(t)) \qquad (x \in [a,b])$$

eine Lösung von $(Lw)(x) = 0$ mit $w_t(t) = 0$ und

$$p(t) \cdot w_t'(t) = \frac{p(t)}{c}(u(t) \cdot v'(t) - u'(t) \cdot v(t)) = 1$$

Satz 12 Die Funktion

$$u_s : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad u_s(x) := \int_a^x w_t(x) \cdot r(t)dt$$

ist eine Lösung von $(Lw)(x) = r(x)$ mit $u_s(a) = u_s'(a) = 0$.

Beweis $u_s(a) = 0$ ist offensichtlich. Es gilt:

$$u_s(x) = \int_a^x w_t(x) r(t) dt = \frac{1}{c} \left(v(x) \int_a^x u(t) r(t) dt - u(x) \int_a^x v(t) r(t) dt \right)$$

$$\begin{aligned}
\implies \quad u_s'(x) =& \frac{1}{c} \Bigg(v'(x) \int_a^x u(t) r(t) dt + v(x) u(x) r(x) \\
& - u'(x) \int_a^x v(t) r(t) dt - u(x) v(x) r(x) \Bigg) \\
=& \frac{1}{c} \left(v'(x) \int_a^x u(t) r(t) dt - u'(x) \int_a^x v(t) r(t) dt \right)
\end{aligned}$$

Damiti st $u_s'(a) = 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
(pu_s')'(x) =& p'(x) u_s'(x) + p(x) u_s''(x) \\
=& \frac{1}{c} \Bigg(p'(x) v'(x) \int_a^x u(t) r(t) dt - p'(x) u'(x) \int_a^x v(t) r(t) dt \\
& + p(x) v''(x) \int_a^x u(t) r(t) dt + p(x) v'(x) u(x) r(x) \\
& - p(x) u''(x) \int_a^x v(t) r(t) dt - p(x) u'(x) v(x) r(x) \Bigg) \\
=& \frac{1}{c} \Bigg(-q(x) v(x) \int_a^x u(t) r(t) dt + q(x) u(x) \int_a^x v(t) r(t) dt \\
& + p(x) v'(x) u(x) r(x) - p(x) u'(x) v(x) r(x) \Bigg) \\
=& - q(x) u_s(x) + r(x) \frac{p(x)}{c} \Big(v'(x) u(x) - u'(x) v(x) \Big) \\
=& - q(x) u_s(x) + r(x),
\end{aligned}$$

also

$$(pu_s')(x) + q(x) u_s(x) = r(x).$$

■

Satz 13 Sei $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem von $(Lw)(x) = 0$ mit $R_a u = R_b v = 0$ und $R_a v \cdot R_b u \neq 0$. Dann ist die eindeutig bestimmte Lösung $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ des halbhomogenen Randwertproblems

$$(Lw)(x) = r(x) \qquad R_a w = R_b w = 0$$

gegeben durch

$$w(x) = \int_a^b G(x,t) r(t) dt$$

mit

$$G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad G(x,t) := \begin{cases} \frac{v(x)u(t)}{c} & a \le t \le x \le b \\ \frac{v(t)u(x)}{c} & a \le x \le t \le b \end{cases}$$

Die Lösung des inhomogenen Randwertproblems ist dann

$$w(x) + \frac{\eta_b}{R_b u} u(x) + \frac{\eta_a}{R_a v} v(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

Beweis Nach Satz 12 ist die allgemeine Lösung $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} w(x) &= u_s(x) + c_1 u(x) + c_2 v(x) \\ &= \frac{1}{c} v(x) \int_a^x u(t) r(t) dt - \frac{1}{c} u(x) \int_a^x v(t) r(t) dt + c_1 u(x) + c_2 v(x) \\ &= u(x) \left(c_1 - \frac{1}{c} \int_a^x v(t) r(t) dt \right) + v(x) \left(c_2 + \frac{1}{c} \int_a^x u(t) r(t) dt \right). \end{aligned}$$

Seien $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ nichttriviale Lösungen von $(Lw)(x) = 0$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) &= 0 \\ \beta_1 v(b) + \beta_2 p(b) u'(b) &= 0. \end{aligned}$$

w ist eine Lösung des Randwertproblems

$$(Lw)(x) = r(x) \qquad R_a w = R_b w = 0,$$

wenn $c_2 = 0, c_1 = -\frac{R_b u_s}{R_b u}$ gilt, da

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{R_b u_s}{R_b u} \\ &= -\frac{\beta_1 \frac{1}{c} \left(v(b) \int_a^b u(t) r(t) dt - u(b) \int_a^b v(t) r(t) dt \right)}{R_b u} \\ &\quad + \frac{\beta_2 p(b) \frac{1}{c} \left(v'(b) \int_a^b u(t) r(t) dt - u'(b) \int_a^b v(t) r(t) dt \right)}{R_b u} \\ &= -\frac{\frac{1}{c} R_b v \int_a^b u(t) r(t) dt - \frac{1}{c} R_b u \int_a^b v(t) r(t) dt}{R_b u} \\ &= \frac{1}{c} \int_a^b v(t) r(t) dt. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
w(x) &= \frac{1}{c}\left(v(x) \int_a^x u(t)r(t)dt - u(x) \int_a^x v(t)r(t)dt \right) \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{c} \int_a^b v(t)r(t)dt}_{=c_1} \cdot u(x) + 0 \cdot v(x) \\
&= \frac{1}{c}\left(v(x) \int_a^x u(t)r(t)dt + u(x) \int_x^b v(t)r(t)dt \right) \\
&= \int_a^b G(x,t)r(t)dt.
\end{aligned}
$$

■

Bem. Die Funktion G aus obigem Satz heißt GREEN*sche Funktion*. Sie hat die folgenden wesentlichen Eigenschaften:

- G ist stetig auf $[a,b]^2$.
- $G(x,t) = G(t,x) \; ((x,t) \in [a,b]^2)$.

Bsp. Sei $p = 1, q = 0, R_a w = w(a), R_b w = w(b)$. Wir betrachten also das Randwertproblem

$$w''(x) = r(x), \qquad w(a) = w(b) = 0.$$

Als Fundamentalsystem von $w'' = 0$ wählen wir

$$
\begin{aligned}
u &: [a,b] \to \mathbb{R} \qquad u(x) = x - a \\
v &: [a,b] \to \mathbb{R} \qquad v(x) = b - x.
\end{aligned}
$$

Dann gilt

$$c := u(x) \cdot v'(x) - u'(x) \cdot v(x) = (x-a)(-1) - (b-x) = -(b-a).$$

Damit gilt:

$$
G(x,t) = \begin{cases} -\frac{(b-x)\cdot(t-a)}{b-a} & a \le t \le x \le b \\ -\frac{(b-t)\cdot(x-a)}{b-a} & a \le x \le t \le b \end{cases}
$$

6 Die STRUMsche Eigenwertaufgabe

Wir betrachten das Problem

$$(Lu)(x) = \lambda u(x) \qquad R_a u = R_b u = 0. \tag{P_λ}$$

Gesucht sind diejenigen $\lambda \in \mathbb{R}$, für die (P_λ) nicht eindeutig lösbar ist, für die also eine Funktion $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, $u \neq 0$ existiert, die (P_λ) genügt. Solche Zahlen λ heißen *Eigenwerte* und die Funktionen u heißen zu λ gehörende *Eigenfunktionen*.

Satz 14 Es sei $G : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ die zu (P_0) gehörige GREENsche Funktion. Weiter sei

$$T : C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}), \qquad (Tu)(x) := \int\limits_a^b G(x,t)u(t)dt.$$

Dann gilt:

1. T ist stetig, selbstadjungiert, kompakt und 0 ist kein Eigenwert von T.
2. λ ist genau dann Eigenwert der STRUMschen Randwertaufgabe, wenn $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von T ist.

Beweis

1. Da G stetig auf $[a,b]^2$ ist, ist G dort beschränkt, etwa

$$|G(x,t)| < \gamma \qquad (x,t \in [a,b]).$$

T ist stetig. Sei $u \in H$. Dann ist

$$\begin{aligned}
||Tu||^2 &= \int\limits_a^b |\int\limits_a^b G(x,t)u(t)dt|^2 dx \le \int\limits_a^b \underbrace{\left(\int\limits_a^b |G(x,t)|\cdot|u(t)|dt\right)^2}_{=(|G(x,\cdot)|,|u|)} dt \\
&\le \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b |G(x,t)|^2 dt \cdot \int\limits_a^b |u(t)|^2 dt\right) dx \\
&\le (b-a)\gamma^2 \int\limits_a^b \int\limits_a^b |u(t)|^2 dt dx = (b-a)^2\gamma^2 ||u||^2.
\end{aligned}$$

Also gilt $||Tu|| \le (b-a)\gamma||u||$ und T ist LIPSCHITZ-stetig.
T ist selbstadjungiert: Seien $u, v \in H$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(Tu,v) &= \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b G(x,t)u(t)dt\right) \cdot v(x)dx \\
&= \int\limits_a^b \int\limits_a^b G(x,t)u(t)v(x)dtdx = \int\limits_a^b \int\limits_a^b G(x,t)u(t)v(x)dxdt \\
&= \int\limits_a^b u(t) \underbrace{\left(\int\limits_a^b \underbrace{G(x,t)}_{=G(t,x)} v(x)dx\right)}_{(Tv)(x)} dt = (u, Tv).
\end{aligned}$$

T ist kompakt: Ist (u_n) eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen u konvergiert, so konvergiert diese Folge auch bezüglich

$||\cdot||$ gegen u, denn

$$||u_n - u|| = \sqrt{\int\limits_a^b |u_n(t) - u(t)|^2 dt} \leq \sqrt{b-a} \cdot \max_{t \in [a,b]} |u_n(t) - u(t)|.$$

Sei nun (u_n) eine bezüglich $||\cdot||$ beschränkte Folge in $C([a,b],\mathbb{R})$ und $c > 0$ mit $||u_n|| \leq c$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|(Tu_n)(x)| = |\int\limits_a^b G(x,t)u_n(t)dt| &\leq \int\limits_a^b |G(x,t)| \cdot |u_n(t)|dt \\
&\leq \sqrt{\int\limits_a^b \underbrace{|G(x,t)|}_{\leq\gamma}{}^2 dt} \cdot ||u_n|| \\
&\leq \sqrt{b-a}\gamma c \qquad (x \in [a,b], n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Da G auf $[a,b]^2$ stetig ist, ist G dort auch gleichmäßig stetig, d.h.

$$\begin{aligned}
&\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \forall \quad x, \tilde{x}, t \in [a,b]: \\
&|x - \tilde{x}| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |G(x,t) - G(\tilde{x},t)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Für $|x - \tilde{x}| < \delta$ gilt damit:

$$\begin{aligned}
&|(Tu_n)(x) - (Tu_n)(\tilde{x})| \\
&= |\int\limits_a^b (G(x,t) - G(\tilde{x},t))u_n(t)dt| \leq \int\limits_a^b \underbrace{|G(x,t) - G(\tilde{x},t)|}_{<\varepsilon} \cdot |u_n(t)|dt \\
&\leq \int\limits_a^b \varepsilon \cdot |u_n(t)|dt \leq \sqrt{\int\limits_a^b \varepsilon^2 dt} \cdot \sqrt{\int\limits_a^b |u_n(t)|^2 dt} \\
&\leq \sqrt{b-a}c\varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Damit ist $\{Tu_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig und nach ARCELA-ASCOLI hat (Tu_n) eine konvergente Teilfolge, die auch bezüglich $||\cdot||$ gegen eine stetige Funktion konvergiert. Damit ist T kompakt.

0 ist kein Eigenwert von T: Sei $u \in C([a,b],\mathbb{R})$ mit $Tu = 0$. Nach Konstruktion der GREENschen Funktion ist $Tu = 0$ die Lösung von

$$(Lu)(x) = u(x) \qquad R_a u = R_b u = 0.$$

Also ist $u = 0$.

2. Nach Konstruktion von G gilt:

$$\begin{array}{ll} & \lambda \text{ ist Eigenwert der } \textsc{Sturm}\text{schen Eigenwertaufgabe} \\ \Longleftrightarrow & \exists\, u \in C([a,b],\mathbb{R}) \setminus \{0\} : \quad (Lu) = \lambda u,\, R_a u = R_b u = 0 \\ \Longleftrightarrow & u(x) = \int\limits_a^b G(x,t)\lambda u(t)dt \\ \Longleftrightarrow & u = \lambda T u \qquad \Longleftrightarrow \qquad Tu = \frac{1}{\lambda} u \\ \Longleftrightarrow & \frac{1}{\lambda} \text{ ist Eigenwert von } T. \end{array}$$

■

Satz 15 Es existieren Folgen (λ_n) in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und (u_n) in $C([a,b],\mathbb{R})$ mit

1. $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n+1}|$ $(n \in \mathbb{N})$ und $|\lambda_n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.
2. $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ sind alle Eigenwerte der Sturmschen Eigenwertaufgabe und u_n ist eine Eigenfunktion zu λ_n.
3. $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist ein maximales Orthonormalsystem.
4. Es gilt

$$Tu = \sum_{n=1}^{\infty} (Tu, u_n) u_n \qquad (u \in C([a,b],\mathbb{R})).$$

Beweis Die Aussage folgt unmittelbar aus den Sätzen 10 und 14. ■

Bem.

1. Ersetzt man $C([a,b],\mathbb{R})$ durch den Hilbert-Raum $L^2([a,b],\mathbb{R})$, so gilt Satz 15 analog und $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist dann eine Orthonormalbasis.
2. Analoge Überlegungen sind möglich für die Eigenwertaufgabe

$$(Lu)(x) = \lambda r(x) u(x) \qquad R_a u = R_b u = 0$$

für gegebenes $r \in C([a,b],\mathbb{R})$, $r > 0$. In diesem Fall verwendet man

$$(u,v) := \int\limits_a^b r(t)u(t)v(t)dt$$

als Skalarprodukt.

Bsp. Betrachte $Lu = u''$, $R_0 u = u(0)$, $R_\pi u = u(\pi)$, also das Randwertproblem

$$u''(x) = \lambda u(x), \qquad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Für $\lambda \geq 0$ existieren keine Eigenwerte. Sei $\lambda < 0$. Dann ist

$$\left\{ \cos(\sqrt{-\lambda} x), \sin(\sqrt{-\lambda} x) \right\}$$

ein Fundamentalsystem. Hier ist $\lambda_n = -n^2$ und als Eigenfunktionen $(u_n)_{n=1}^\infty$ erhält man z.B. die Funktionenfolge

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Satz 16 Die Konvergenz der Reihe

$$Tu = \sum_{n=1}^{\infty}(Tu, u_n)u_n$$

aus Satz 15.4 ist gleichmäßig.

Beweis Für $x \in [a, b]$ gilt

$$\left(\sum_{k=m}^{n} |(Tu, u_k) \cdot u_k(x)|\right)^2 = \left(\sum_{k=m}^{n} |\frac{1}{\lambda_k}(u, u_k)u_k(x)|\right)^2$$
$$\leq \sum_{k=m}^{n} |(u, u_k)|^2 \cdot \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_k}u_k(x)\right)^2.$$

Aus

$$\frac{1}{\lambda_k}u_k(x) = (Tu_k)(x) = \int_a^b G(x,t)u_k(t)dt = (G(x,\cdot), u_k)$$

folgt

$$\sum_{k=m}^{n}\left(\frac{1}{\lambda_k}u_k(x)\right)^2 = \sum_{k=m}^{n} |(G(x,\cdot), u_k)|^2 \leq ||G(x,\cdot)||^2$$
$$= \int_a^b |G(x,t)|^2 dt \leq (b-a) \cdot \max_{a \leq x, t \leq b} |G(x,t)|^2 =: \alpha.$$

Damit gilt:

$$\left(\sum_{k=m}^{n} |(Tu, u_k)u_k(x)|\right)^2 \leq \alpha \cdot \sum_{k=m}^{n} |(u, u_k)|^2 \qquad (x \in [a, b]).$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Bsp. Betrachte $Lu = u'', R_0 u = u(0), R_\pi u = u(\pi)$. Hier ist $(\lambda_n) = -n^2$ und (u_n) z.B. gegeben durch

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx),$$

denn

$$\int_0^\pi \sin^2(nx)dx = \frac{\pi}{2}.$$

Sei T der zum Randwertproblem

$$Lw = w'', \qquad R_0 w = w(0), R_\pi w = w(\pi)$$

gehörende Operator. Die Funktion

$$w : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad w(x) = x(x - \pi)$$

liegt in $\operatorname{Bild} T$ und hat das Urbild $u = 2$, denn $(T2)(x) = x(x - \pi)$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
(T2, u_n) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi x(x-\pi)\sin(nx)dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3} \qquad (n \in \mathbb{N}) \\
\Longrightarrow \qquad x(x-\pi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3} \sin(nx) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n+1)^3} \sin((2n+1)x).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt mit dem speziellen $x = \frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi^2}{4} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)^3} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

7 Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen. Weiter sei $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad y(x_0) = y_0 \tag{$*$}$$

für ein vorgegebenes $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Satz 17 (Satz von Peano) Das Anfangswertproblem $(*)$ ist lokal lösbar und jede Lösung läßt sich zu einer nicht fortsetzbaren Lösung $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^n$ fortsetzen.

Bem. Ist $(*)$ eindeutig lösbar, so ist $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^n$ eindeutig bestimmt und heißt *die* Lösung von $(*)$. Um die Abhängigkeit von (x_0, y_0) zu untersuchen, schreibt man $y(x, x_0, y_0), \omega_-(x_0, y_0)$ und $\omega_+(x_0, y_0)$ für diejenigen $(x_0, y_0) \in \Omega$, für die $(*)$ eindeutig lösbar ist. Im Fall, daß $(*)$ für alle $(x_0, y_0) \in \Omega$ eindeutig lösbar ist, erhält man eine Funktion $y : E_\Omega \to \mathbb{R}^n$ mit

$$E_\Omega = \{(x, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \Omega : \omega_-(x_0, y_0) < x < \omega_+(x_0, y_0)\}$$

Satz 18 Es sei (f_k) eine Folge in $C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $((\xi_k, \eta_k))$ eine Folge in Ω. Die Folge (f_k) konvergiere gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gegen $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $((\xi_k, \eta_k))$ konvergiere für $k \to \infty$ gegen $(x_0, y_0) \in \Omega$. Es sei jeweils $y_k : (\omega_{k_-}, \omega_{k_+}) \to \mathbb{R}^n$ eine nicht fortsetzbare Lösung von

$$y'(x) = f_k(x, y(x)), \qquad y(\xi_k) = \eta_k. \tag{A}$$

Dann gibt es eine nicht fortsetzbare Lösung $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^n$ von

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{N}$$

mit folgender Eigenschaft: Eine Teilfolge (y_{k_j}) von (y_k) konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von (ω_-, ω_+) gegen y. Insbesondere gilt

$$\limsup_{j\to\infty} \omega_{k_j-} \le \omega_- \le \omega_+ \le \liminf_{j\to\infty} \omega_{k_j+}.$$

Bem. Ist im obigen Satz das Anfangswertproblem (A) eindeutig lösbar, so konvergiert bereits (y_k) selbst gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von (ω_-, ω_+) gegen die Lösung $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^n$ von (N). Falls (A) für jedes $(x_0, y_0) \in \Omega$ eindeutig lösbar ist, erhält man insbesondere durch Betrachtung von $f_k = f$ $(k \in \mathbb{N})$ die folgenden Aussagen:

- $E_\Omega = \{(x, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \Omega : \omega_-(x_0, y_0) < x < \omega_+(x_0, y_0)\}$
- $y : E_\Omega \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.

Bsp. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Für ein $(x_0, y_0, \lambda) \in \Omega$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x), \lambda) \qquad y(x_0) = y_0. \tag{A_λ}$$

Falls alle Anfangswertprobleme (A_λ) eindeutig lösbar sind, erhält man die stetig Abhängigkeit der Lösung $y(x) = y(x, x_0, y_0, \lambda)$. Dazu erweitert man die abhängigen Variablen um λ, betrachtet also das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x), \lambda(x)) \qquad & y(x_0) &= y_0 \\ \lambda'(x) &= 0 & \lambda(x_0) &= \lambda_0 \end{aligned}$$

als Anfangswertproblem im $\mathbb{R}^{n+m}$. Die Lösung y_λ hängt stetig von (x, x_0, y_0, λ_0) ab und damit hängt y stetig von (x, x_0, y_0, λ_0) ab.

Satz 19 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, f stetig auf Ω und $f = f(x, y)$ stetig differenzierbar nach y. Weiter sei

$$w : E_\Omega \to \mathbb{R}^n, \qquad w = w(x, x_0, y_0)$$

die Lösung von

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Dann gilt: w ist stetig differenzierbar nach y_0 und

$$w_{y_0}(\cdot, x_0, y_0) : (\omega_-(x_0, y_0), \omega_+(x_0, y_0)) \to \mathbb{R}^{n\times n}$$

ist die Lösung der zu (A) gehörenden *Variationsgleichung*

$$u'(x) = f_y(x, w(x, x_0, y_0)) \cdot u(x), \qquad u(x_0) = I_{n\times n}. \tag{V}$$

Ist $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so ist $w \in C^1(E_\Omega, \mathbb{R}^n)$ und zusätzlich gilt

$$w_{x_0}(x, x_0, y_0) = -w_{y_0}(x, x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0).$$

Bsp. Betrachte $\Omega = \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1 + y^2$, also

$$y'(x) = 1 + (y(x))^2, \qquad y(x_0) = y_0. \tag{A}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\omega_\pm(x_0, y_0) &= \pm\frac{\pi}{2} - \arctan y_0 + x_0 \\
w(x, x_0, y_0) := y(x) &= \tan(x + \arctan y_0 - x_0) \qquad (x \in \omega_-(x_0, y_0), \omega_+(x_0, y_0)).
\end{aligned}$$

Dies führt auf die Variationsgleichung

$$u'(x) = 2\tan(x + \arctan y_0 - x_0)u(x) \qquad u'(x_0) = 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
w_{y_0}(x, x_0, y_0) = u(x) &= (1 + \tan^2(x + \arctan y_0 - x_0)) \cdot \frac{1}{1 + y_0^2} \\
&= \frac{1}{(1 + y_0^2) \cdot \cos^2(x + \arctan y_0 - x_0)}.
\end{aligned}$$

Satz 20 (Differentialungleichungen) Wir betrachten eine Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und differenzierbare Funktionen $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1. Aus $u(a) \le v(a)$ und

   $$u'(x) - f(x, u(x)) < v'(x) - f(x, v(x)) \qquad (x \in (a, b])$$

   folgt $u(x) < v(x)$ $(x \in (a, b])$.

2. Ist f auf $[a, b] \times \mathbb{R}$ stetig und LIPSCHITZ-stetig bezüglich y, so gilt: Aus $u(a) \le v(a)$ $[u(a) < v(a)]$ und

   $$u'(x) - f(x, u(x)) \le v'(x) - f(x, v(x)) \qquad (x \in [a, b])$$

   folgt $u(x) \le v(x)$ $[u(x) < v(x)]$ $(x \in [a, b])$.

8 Die Prüfertransformation

Def. 9 Es sei $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine nichttriviale Lösung von $(Lu)(x) = 0$. Dann heißen die Funktionen $\varphi, \varrho : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := \arctan\frac{u(x)}{p(x)u'(x)}, \qquad \varrho(x) := \sqrt{(p(x)u'(x))^2 + (u(x))^2}$$

die *Prüfertransformation* von $(Lu)(x) = 0$.

Bem.

- (φ, ϱ) ist die Polarkoordinatendarstellung des Weges
$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(t) := (p(t)u'(t), u(t)).$$
φ ist wohldefiniert, weil γ nach Voraussetzung nicht identisch 0 ist und wegen der eindeutigen Lösbarkeit von Anfangswertproblemen zu $(Lu)(x) = 0$ damit überhaupt nicht durch den Nullpunkt geht.

- $\varphi(a) \in [0, 2\pi)$ wird geeignet gewählt und jeweils beim Übergang über die u-Achse, wenn also x gegen eine Nullstelle von u' geht, wird durch Addition oder Subtraktion von π der Zweig des arctan gewechselt.

Satz 21 Sei (φ, ϱ) die Prüfertransformartion von $(Lu)(x) = 0$. Dann gilt
$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{1}{p(x)}\cos^2\varphi(x) + q(x)\sin^2\varphi(x) \\
\varrho'(x) &= \left(\frac{1}{p(x)} - q(x)\right)\varrho(x)\sin\varphi(x)\cos\varphi(x).
\end{aligned}$$

Beweis Nach Konstruktion gilt auf $[a, b]$:
$$\begin{aligned}
p(x)u'(x) &= \varrho(x)\cos\varphi(x), \\
u(x) &= \varrho(x)\sin\varphi(x) \\
\Longrightarrow \quad (pu')'(x) &= \varrho'(x)\cos\varphi(x) - \varrho(x)\varphi'(x)\sin\varphi(x) \\
&= -q(x)u(x) = -q(x)\varrho(x)\sin\varphi(x), \\
p(x)u'(x) &= p(x)\varrho'(x)\sin\varphi(x) + p(x)\varrho(x)\varphi'(x)\cos\varphi(x) \\
&= \varrho(x)\cos\varphi(x).
\end{aligned}$$

Multiplikation der oberen Gleichung mit $p(x)\sin\varphi(x)$ und der zweiten Gleichung mit $-\cos\varphi(x)$ und Addition der Resultate liefert
$$\begin{aligned}
& - p(x)\varrho(x)\varphi'(x)\sin^2\varphi(x) - p(x)\varrho(x)\varphi'(x)\cos^2\varphi(x) \\
= & - p(x)q(x)\varrho(x)\sin^2\varphi(x) - \varrho(x)\cos^2\varphi(x)
\end{aligned}$$

und damit
$$\varphi'(x) = \frac{1}{p(x)}\cos^2\varphi(x) + q(x)\sin^2\varphi(x).$$

Weiter gilt
$$\begin{aligned}
\varrho'(x) &= \frac{-p(x)u'(x) \cdot q(x)u(x) + u(x)u'(x)}{\varrho(x)} \\
&= \frac{-\varrho(x)\cos\varphi(x) \cdot q(x)\varrho(x)\sin\varphi(x) + \frac{\varrho^2(x)}{p(x)}\sin\varphi(x)\cos\varphi(x)}{\varrho(x)},
\end{aligned}$$

also
$$\varrho'(x) = \left(\frac{1}{p(x)} - q(x)\right)\varrho(x)\sin\varphi(x)\cos\varphi(x).$$

∎

Bem.

- Diese Differentialgleichungen erfüllen die Voraussetzungen des Satzes von PICARD-LINDELÖF, so daß man ohne Kenntnis von Differenzierbarkeitseigenschaften von p und q auf die Existenz von Lösungen schließen kann.
- Die Prüfertransformation ist besonders nützlich zur Untersuchung der Nullstellen von u, da gilt

$$u(x_0) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi(x_0) = 0 \bmod \pi.$$

- Da mit φ auch $\varphi - \pi$ den obigen Differentialgleichungen genügt, kann man stets $\varphi(a) \in [0, \pi)$ annehmen.

9 Die Sätze von STURM

Bem. Eine nichttriviale Lösung $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat höchstens endlich viele Nullstellen.

Satz 22 Es sei u eine nichttriviale Lösung von $(Lu)(x) = 0$ mit genau n Nullstellen $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ in $(a, b]$. φ mit $\varphi(a) \in [0, \pi)$ sei die zu u gehörige Funktion aus der Prüfertransformation. Dann gilt

$$\varphi(x_k) = k\pi, \qquad \varphi(x) > k\pi \quad (x \in (x_k, b]).$$

Beweis Aus

$$\varphi'(x) = q(x) \sin^2 \varphi(x) + \frac{1}{p(x)} \cos^2 \varphi(x)$$

folgt: Für $x_0 \in (a, b)$ mit $\varphi(x_0) = 0 \bmod \pi$ gilt $\varphi'(x_0) > 0$. Damit ist φ in einer Umgebung von x_0 streng monoton wachsend. Ist also $x_0 \in [a, b]$ mit $\varphi(x_0) > k\pi$, so ist $\varphi(x) > k\pi$ $(x > x_0)$. Ebenso folgt aus $\varphi(x_0) < k\pi$, daß $\varphi(x) < k\pi$ $(x < x_0)$. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Def. 10 Auf $[a, b]$ seien zwei Differentialoperatoren

$$L_1 u = (p_1 u')' + q_1 u, \qquad L_2 u = (p_2 u')' + q_2 u$$

gegeben. Gilt $p_1(x) \geq p_2(x) > 0$, $q_1(x) \leq q_2(x)$ $(x \in [a, b])$, so heißt L_2 *majorant* zu L_1.

Satz 23 (1. STURMscher Vergleichssatz) Es gelte $(L_1 u_1)(x) = 0$ auf $[a, b]$ und u_1 habe auf $(a, b]$ genau die n Nullstellen $x_1 < \cdots < x_n$. $u_2 \neq 0$ sei eine Lösung von $(L_2 u_2)(x) = 0$ auf $[a, b]$ mit

$$\frac{p_1(a) u_1'(a)}{u_1(a)} \geq \frac{p_2(a) u_2'(a)}{u_2(a)}$$

$(\frac{1}{0} := \infty)$ und L_2 majorisiere L_1. Dann besitzt u_2 mindestens n Nullstellen auf $(a, x_n]$. Gilt in der obigen Gleichung sogar $>$ statt $\geq$ oder majorisiert L_2 L_1 strikt, so hat u_2 mindestens n Nullstellen in (a, x_n).

Beweis Sei φ_i die Prüfertransformierte von u_i $(i = 1, 2)$. φ_1 und φ_2 können nach Voraussetzung so gewählt werden, daß

$$0 \leq \varphi_1(a) \leq \varphi_2(a) < \pi$$

gilt. Für $i = 1, 2$ gelten die Differentialgleichungen

$$\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_i(x))$$

mit

$$f_i : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_i(x, y) = \frac{1}{p_i(x)} \cos^2 y + q_i(x) \sin^2 y.$$

f_1 und f_2 sind stetig auf $[a, b] \times \mathbb{R}$ und LIPSCHITZ-stetig in y. Weiter gilt

$$\varphi_1'(x) - f_1(x, \varphi_1(x)) = 0 \leq \varphi_2'(x) - f_1(x, \varphi_2(x))$$
$$\varphi_1(a) \leq \varphi_2(a)$$

und so folgt aus Satz 20 $\varphi_1 \leq \varphi_2$ auf $[a, b]$.

Wegen $\varphi_1(x_n) = n\pi$ gilt $\varphi_2(x_n) \geq n\pi$. Damit hat u_2 mindestens n Nullstellen in $(a, x_n]$. Ist $\varphi_1(a) < \varphi_2(a)$, so gilt $\varphi_1 < \varphi_2$, also $\varphi_2(x_n) > n\pi$. Dann also hat u_2 mindestens n Nullstellen in (a, x_n). ∎

Bem. (Trennungssatz von STURM) Es gilt zusätzlich: Zwischen je zwei Nullstellen von u_1 liegt eine Nullstelle von u_2. Im Fall $L_1 = L_2$ liegt zwischen je zwei Nullstellen von u_1 genau eine Nullstelle von u_2 (und umgekehrt).

Satz 24 (2. STURMscher Vergleichssatz) Es gelte $(L_1 u_1)(x) = 0$ auf $[a, b]$ und u_1 habe auf $(a, b]$ genau die n Nullstellen $x_1 < \cdots < x_n$. $u_2 \neq 0$ sei eine Lösung von $(L_2 u_2)(x) = 0$ auf $[a, b]$ mit

$$\frac{p_1(a) u_1'(a)}{u_1(a)} \geq \frac{p_2(a) u_2'(a)}{u_2(a)}$$

$(\frac{1}{0} := \infty)$ und L_2 majorisiere L_1. Weiter habe u_2 in $(a, b]$ genau n Nullstellen. Dann gilt:

$$\frac{p_1(b) u_1'(b)}{u_1(b)} \geq \frac{p_2(b) u_2'(b)}{u_2(b)}$$

$(\frac{1}{0} := -\infty)$.

Beweis Wie der Beweis von Satz 23 mit der zusätzlichen Verwendung von

$$n\pi \leq \varphi_1(b) \leq \varphi_2(b) < (n + 1)\pi.$$

∎

Bsp.

- Es sei $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $0 < m \leq q(x) \leq M$ auf $[a,b]$. Dann gilt: Sind x_1, x_2 zwei aufeinanderfolgende Nullstellen der Lösung u von

$$u''(x) + q(x)u(x) = 0,$$

so gilt

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq x_2 - x_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

Bew.: Wir betrachten die Differentialoperatoren $L_1 u = u'' + mu$ und $Lu = u'' + qu$ und $L_2 u = u'' + Mu$. L_2 majorisiert L und L majorisiert L_1. Für

$$u_1(x) := \sin(\sqrt{m}(x - x_1)), \qquad u_2(x) := \sin(\sqrt{M}(x - x_1))$$

gilt $(L_1 u_1)(x) = 0$ und $(L_2 u_2)(x) = 0$ sowie

$$\frac{u_1'(x_1)}{u_1(x_1)} = \frac{u'(x_1)}{u(x_1)} = \frac{u_2'(x_1)}{u_2(x_1)} = \infty.$$

Nach dem ersten STURMschen Vergleichssatz besitzt u_2 eine erste Nullstelle $\overline{x}_2$ in $(x_1, x_2]$, woraus

$$\pi = \sqrt{M} \cdot (\overline{x}_2 - x_1) \leq \sqrt{M} \cdot (x_2 - x_1),$$

also $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq x_2 - x_1$ folgt. Da L L_1 majorisiert, besitzt u eine Nullstelle in $(x_1, x_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}]$ und aus $x_2 \in (x_1, x_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}})$ folgt $x_2 - x_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Aus beidem folgt die Behauptung. ∎

- Für eine Funktion q mit $0 < m \leq q(x) \leq M$ betrachten wir das Randwertproblem

$$u''(x) + q(x)u(x) = 0, \qquad u(a) = u(b) = 0.$$

Existiert eine Lösung $u \neq 0$, so gilt nach dem obigen Beispiel $b - a \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}}$. Umgekehrt kann man aus $b - a < \frac{\pi}{\sqrt{M}}$ also schließen, daß das Randwertproblem nur trivial lösbar ist.

10 Nochmals die STURMsche Eigenwertaufgabe

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Differentialoperator $Lu = (pu')' + qu$ und das Randwertproblem

$$\left.\begin{array}{rcl} (Lu)(x) + \lambda u(x) & = & 0 \\ R_a u = u(a)\cos\alpha - p(a)u'(a)\sin\alpha & = & 0 \\ R_b u = u(b)\cos\beta - p(b)u'(b)\sin\beta & = & 0 \end{array}\right\} \quad (P_\lambda)$$

Die leicht geänderte Form der Randbedingungen hat den Vorteil, daß man bei Anwendung der Prüfertransformation $\alpha = \varphi(a) \in [0,\pi)$ und $\beta = \varphi(b) \in (0,\pi]$ betrachten kann.

Satz 25 Es gibt eine unbeschränkte, streng monoton wachsende Folge (λ_n) in $\mathbb{R}$, so daß das Problem (P_λ) genau dann nichttrivial lösbar ist, wenn $\lambda = \lambda_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis Löst man das Anfangswertproblem

$$(Lu)(x) + \lambda u(x) = 0 \qquad u(a) = \sin\alpha, u'(a) = \frac{1}{p(a)}\cos\alpha,$$

so ist $R_a u = 0$. Dann ist also (P_λ) genau dann nichttrivial lösbar, wenn die Lösung $u(x,\lambda)$ dieses Anfangswertproblems der zweiten Randbedingung $R_b u = 0$ genügt. Betrachte die Prüfertransformation für ein festes λ, also die Differentialgleichung

$$\varphi'(x,\lambda) = \frac{1}{p(x)}\cos^2\varphi(x,\lambda) + (q(x)+\lambda)\sin^2\varphi(x,\lambda) \qquad \varphi(a,\lambda) = \alpha.$$

Hierdurch ist eine Funktion $\varphi : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert, die stetig auf $[a,b]\times\mathbb{R}$ und stetig partiell differenzierbar nach λ ist. Aus

$$\begin{aligned}
\varphi'(x,\lambda) &= \frac{1}{p(x)}\cos^2\varphi(x,\lambda) + (q(x)+\lambda)\sin^2\varphi(x,\lambda)\\
&= \frac{1}{p(x)} + \left(q(x)+\lambda-\frac{1}{p(x)}\right)\sin^2\varphi(x,\lambda)\\
\varphi(a,\lambda) &= \alpha
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\varphi'_\lambda(x,\lambda) = {}& \left(q(x)-\frac{1}{p(x)}+\lambda\right)\cdot 2\sin\varphi(x,\lambda)\cdot\cos\varphi(x,\lambda)\cdot\varphi_\lambda(x,\lambda)\\
&+\sin^2\varphi(x,\lambda)\\
\varphi_\lambda(a,\lambda) = {}& 0.
\end{aligned}$$

Es gilt $\varphi'(a,\lambda) > 0$ oder $\varphi(a,\lambda) > 0$ und

$$\begin{aligned}
&\varphi'(x,\lambda) - \frac{1}{p(x)}\cos^2\varphi(x,\lambda) - (q(x)+\lambda)\sin^2\varphi(x,\lambda) = 0\\
> {}& 0' - \frac{1}{p(x)}\cos^2 0 - (q(x)+\lambda)\sin^2 0 = -\frac{1}{p(x)}.
\end{aligned}$$

Somit ist $\varphi(x,\lambda) > 0$ $(x\in(a,b])$.

Für festes λ schneidet $\varphi(\cdot,\lambda)$ die Gerade $k\pi$ höchstens einmal und wenn, dann von unten nach oben. Insbesondere hat $\sin\varphi(\cdot,\lambda)$ in $[a,b]$ nur endlich viele Nullstellen. Durch Integration der linearen Differentialgleichung für φ_λ folgt $\varphi_\lambda(x,\lambda) > 0$. Damit ist insbesondere $\varphi(b,\lambda)$ streng monoton wachsend in λ.

Es gilt $\varphi(b,\lambda) \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0$. Dazu betrachte die Gerade

$$\overline{\varphi}(x) := \frac{2\varepsilon-\pi}{b-a}(x-a) + \pi - \varepsilon.$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ hat $\overline{\varphi}$ die Eigenschaft $\overline{\varphi}(a) = \pi - \varepsilon > \alpha$ und für hinreichend kleines $\lambda < 0$ gilt

$$\overline{\varphi}'(x) = \frac{2\varepsilon - \pi}{b - a} > \frac{1}{p(x)} + \left(q(x) - \frac{1}{p(x)} + \lambda\right) \cdot \sin^2 \overline{\varphi}(x).$$

Für diese λ gilt somit $0 < \varphi(b, \lambda) < \overline{\varphi}(b) = \varepsilon$.

Weiter gilt $\varphi(b, \lambda) \xrightarrow{\lambda \to \infty} \infty$: Für hinreichend große $\lambda > 0$ gilt für geeignete Konstanten $A_0, B_0, A, B > 0$

$$0 < A_0 + \lambda B_0 \sin^2 \varphi \leq \frac{1}{p} + \left(q - \frac{1}{p} + \lambda\right) \cdot \sin^2 \varphi \leq A + \lambda B \sin^2 \varphi$$

auf $[a, b]$, also

$$\frac{\varphi'}{A + \lambda B \sin^2 \varphi} \leq 1 \leq \frac{\varphi'}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 \varphi}.$$

Durch Integration und Substitution $s = \varphi(x, \lambda)$ erhält man daraus

$$\int_{\alpha}^{\varphi(b,\lambda)} \frac{1}{A + \lambda B \sin^2 s} ds \leq b - a \leq \int_{\alpha}^{\varphi(b,\lambda)} \frac{1}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 s} ds.$$

$\varphi(b, \lambda) \xrightarrow{\lambda \to \infty} \infty$ folgt aus der rechten Ungleichung.

Zusammenfassend gilt:

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \varphi(b, \lambda) = 0, \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \varphi(b, \lambda) = \infty$$

und $\varphi(b, \cdot)$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

Wegen $\beta \in (0, \pi]$ existiert eine erste Stelle λ_1 mit $\varphi(b, \lambda_1) = \beta$, eine zweite Stelle λ_2 mit $\lambda_2 > \lambda_1$ und $\varphi(b, \lambda_2) = \pi + \beta$ und so weiter. Und zu jedem λ_n existiert eine zugehörige nichttriviale Lösung. ■

Bem.

- Zusätzlich gilt

$$0 < \liminf_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n^2} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n^2} < \infty$$

- λ_n der n-te Eigenwert und u_n die zu λ_n gehörige Eigenfunktion, so besitzt u_n genau $n - 1$ Nullstellen in (a, b).

- Da der Lösungsraum eines linearen Randwertproblems eindimensional ist, ist mit u_n jede weitere Eigenfunktion von der Form cu_n $(c \neq 0)$.

11 Nichtlineare Randwertprobleme

$Lu = (pu')' + qu$ sei ein Differentialoperator und R_a, R_b seien Randoperatoren. Weiter sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gesucht sind Lösungen des Randwertproblems

$$(Lu)(x) = f(x, u(x), u'(x)), \qquad R_a u = \eta_a, R_b u = \eta_b. \tag{$*$}$$

Wir nehmen an, daß das zu $(*)$ gehörige homogene Problem nur trivial lösbar ist und daß zu $(*)$ eine GREENsche Funktion existiert.

Bem. Zur Vereinfachung beschränken wir uns im Folgenden auf den Fall $\Omega = \mathbb{R}^2$,

$$Lu = u'', \qquad R_a u = u(a), R_b u = u(b).$$

Der allgemeine Fall geht analog, wenn man genügend Informationen über die GREENsche Funktion zur Verfügung hat. Wir nehmen oBdA weiter an, daß $[a,b] = [0,1]$ ist. Die GREENsche Funktion lautet dann

$$G : [0,1]^2 \to \mathbb{R}, \qquad G(x,t) = \begin{cases} -(1-x)t & 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ -x(1-t) & 0 \leq x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Wir betrachten den Fall $\eta_a = \eta_b = 0$. Für den allgemeinen Fall betrachtet man

$$u(x) = y(x) + \frac{x-a}{b-a}(\eta_b - \eta_a) + \eta_a$$

und für y das Randwertproblem

$$y''(x) = F(x, y(x), y'(x)), \qquad R_a y = 0, R_b y = 0$$

mit

$$F(x,y,p) := f(x, y + \frac{x-a}{b-a}(\eta_b - \eta_a) + \eta_a, p + \frac{\eta_b - \eta_a}{b-a}).$$

Dann löst u das Randwertproblem

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \qquad R_a u = \eta_a, R_b u = \eta_b.$$

Insgesamt betrachten wir also das Randwertproblem

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0 \tag{N}$$

Bsp. Sei $g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to (0, \infty)$ stetig. Betrachte das Randwertproblem

$$u''(x) = -\pi^2 u(x) + g(x, u(x), u'(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Dieses Randwertproblem ist unlösbar.
Bew.: Angenommen, $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & u''(x) + \pi^2 u(x) = g(x, u(x), u'(x)) \\ \Longrightarrow \quad & \sin(\pi x) u''(x) + \sin(\pi x)\pi^2 u(x) = \sin(\pi x) g(x, u(x), u'(x)) \\ \Longrightarrow \quad & \int_0^1 \sin(\pi x) u''(x) dx + \int_0^1 \sin(\pi x) \pi^2 u(x) dx = \underbrace{\int_0^1 \sin(\pi x) g(x, u(x), u'(x)) dx}_{>0}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin(\pi x) u''(x)dx &= \underbrace{\Big[u'(x)\cdot\sin(\pi x)\Big]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \pi\cos(\pi x)u'(x)dx \\ &= -\left(\underbrace{\Big[\pi\cos(\pi x)u(x)\Big]_0^1}_{=0} + \pi^2\int_0^1 u(x)\sin(\pi x)dx\right) \\ &= -\int_0^1 \sin(\pi x)\pi^2 u(x)dx,\end{aligned}$$

also

$$\int_0^1 \sin(\pi x)u''(x)dx + \int_0^1 \sin(\pi x)\pi^2 u(x)dx = 0.$$

Widerspruch! ■

Bem. Wir wollen das Problem (N) mit Hilfe der GREENschen Funktion als Fixpunktproblem darstellen. Dazu betrachten wir den Raum $E := C^1([0,1],\mathbb{R})$ mit der Norm

$$||u|| := ||u||_\infty + ||u'||_\infty = \max_{x\in[0,1]}|u(x)| + \max_{x\in[0,1]}|u'(x)|.$$

$(E, ||\cdot||)$ ist dann ein BANACH-Raum. Der Operator T sei definiert durch

$$T: E \to E, \qquad (Tu)(x) := \int_0^1 G(x,t)f(t,u(t),u'(t))dt.$$

T ist stetig und $u \in E$ löst (N) genau dann wenn $Tu = u$ gilt.

Def. 11 Sei E ein BANACH-Raum, $C \subseteq E$ abgeschlossen und $T : C \to E$ stetig. T heißt *kompakt*, falls gilt: Für jede Folge (x_n) in C besitzt (Tx_n) eine konvergente Teilfolge.

Bem.

- Die obige Definition stimmt im Fall $C = E$ und T linear *nicht* mit der Definition eines kompakten linearen Operators überein. Dort wird nämlich (x_n) als beschränkt vorausgesetzt.
- Ist T kompakt, so ist $T(C)$ beschränkt.

Satz 26 (Fixpunktsatz von SCHAUDER) Sei E ein BANACH-Raum, $\emptyset \neq C \subseteq E$ abgeschlossen und konvex. $T : C \to C$ sei kompakt. Dann hat T einen Fixpunkt.

Satz 27 (Satz von SCORZA-DRAGONI). Es sei $f : [0,1]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann hat das Randwertproblem (N) eine Lösung.

Beweis Betrachte $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ und

$$T : E \to E, \qquad (Tu)(x) := \int\limits_0^1 G(x,t)f(t,u(t),u'(t))dt.$$

Da Fixpunkte von T Lösungen von (N) sind, folgt die Aussage aus Satz 26, wenn gezeigt ist, daß T kompakt ist. Dies ist der Fall:

Da f beschränkt ist, existiert ein $M \geq 0$ mit $|f| \leq M$ auf $[0,1] \times \mathbb{R}^2$. Sei $u \in E$ beliebig. Für $v = Tu$ gilt dann

$$v''(x) = f(x,u(x),u'(x)), \qquad v(0) = v(1) = 0,$$

also $|v''(x)| \leq M$ $(x \in [0,1])$. Damit sind alle ersten Ableitungen der Funktionen in $T(E)$ LIPSCHITZ-stetig zur Konstanten M, d.h.

$$\{v' : v \in T(E)\}$$

ist gleichgradig stetig. Außerdem ist diese Menge wegen

$$|v'(x)| = |(Tu)'(x)| \leq \int\limits_0^x (1-x)tM\,dt + \int\limits_x^1 x(1-t)M\,dt \leq M \quad (x \in [0,1])$$

beschränkt. Für jede Folge (u_n) in E folgt aus dem Satz von ARCELA-ASCOLI die Existenz einer auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergenten Teilfolge (v'_{n_k}) von (v'_n), wobei $v_n := Tu_n$. Sei w der Grenzwert von (v'_{n_k}). Wegen

$$v_{n_k}(x) = \int\limits_0^x v'_{n_k}(t)dt$$

konvergiert (v_{n_k}) auf $[0,1]$ auch gleichmäßig, nämlich gegen $x \mapsto \int\limits_0^x w(t)dt$.

Damit ist (v_{n_k}) konvergent bezüglich $||\cdot||$, also ist T kompakt. ■

Bsp. Für $a,b,c \in C([0,1],\mathbb{R})$ besitzt das Randwertproblem

$$u''(x) = c(x)\sin(a(x)u(x)+b(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

eine Lösung.

Def. 12 $v \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ heißt *Oberfunktion* zum Randwertproblem (N), falls gilt

$$v''(x) \geq f(x,v(x),v'(x)), \qquad v(0) \leq 0, v(1) \leq 0.$$

$w \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ heißt *Unterfunktion* zum Randwertproblem (N), falls gilt

$$w''(x) \leq f(x,w(x),w'(x)), \qquad w(0) \geq 0, w(1) \geq 0.$$

Sei v eine Unterfunktion und w eine Oberfunktion zu (N) mit $v \leq w$. f genügt relativ zu v und w einer NAGUMO-*Bedingung*, wenn es eine stetige Funktion $\varphi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ gibt mit

$$|f(x,u,p)| \leq \varphi(|p|) \qquad (x \in [0,1], u \in [v(x),w(x)], p \in \mathbb{R})$$

und

$$\int_0^\infty \frac{s}{\varphi(s)} ds = \infty.$$

Satz 28 Seien $v, w \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ mit $v \leq w$ und $\varphi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ stetig mit

$$\int_0^\infty \frac{s}{\varphi(s)} ds = \infty.$$

Dann existiert eine nur von v, w und φ abhängige Konstante $M > 0$ mit: Für alle Funktionen $u \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ mit

$$|u''(x)| \leq \varphi(|u'(x)|) \qquad (x \in [0,1])$$

und $v(x) \leq u(x) \leq w(x)$ $(x \in [0,1])$ gilt

$$|u'(x)| \leq M \qquad (x \in [0,1]).$$

Beweis Es existiert ein $x_0 \in (0,1)$ mit

$$v(1) - w(0) \leq u'(x_0) = \frac{u(1) - u(0)}{1 - 0} \leq w(1) - v(0),$$

also

$$|u'(x_0)| \leq w \max\{|w(1) - v(0)|, |v(1) - w(0)|\} =: p_0.$$

Außerdem existiert ein $x_1 \in [0,1]$ mit

$$|u'(x_1)| = \max_{x \in [0,1]} |u'(x)|.$$

OBdA sei $u'(x_1) > p_0$. Dann gibt es einen am nächsten bei x_1 liegenden Punkt $\overline{x}_0$ mit $u'(\overline{x}_0) = p_0$. Im von $\overline{x}_0$ und x_1 begrenzten Intervall gilt dann $u'(x) \geq p_0 \geq 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
|u(x_1) - u(\overline{x}_0)| &= |\int_{\overline{x}_0}^{x_1} u'(t) dt| \geq |\int_{\overline{x}_0}^{x_1} \frac{u'(t)|u''(t)|}{\varphi(|u'(t)|)} dt| \\
&\geq |\int_{\overline{x}_0}^{x_1} \frac{u'(t)u''(t)}{\varphi(|u'(t)|)} dt| = \int_{p_0}^{u'(x_1)} \frac{s}{\varphi(s)} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \int_{p_0}^{u'(x_1)} \frac{s}{\varphi(s)} ds &\leq \max_{x \in [0,1]} u(x) - \min_{x \in [0,1]} u(x) \\
&\leq \max_{x \in [0,1]} w(x) - \min_{x \in [0,1]} v(x).
\end{aligned}$$

Ist M nun so bestimmt, daß

$$\int_{p_0}^{M} \frac{s}{\varphi(s)} ds = \max_{x\in[0,1]} w(x) - \min_{x\in[0,1]} v(x)$$

gilt, was nach Voraussetzung möglich ist, so gilt $u'(x_1) \leq M$.

Im Fall $u'(x_1) < -p_0$ führt die gleiche Rechnung auf

$$\int_{p_0}^{-u'(x_1)} \frac{s}{\varphi(s)} ds \leq \max_{x\in[0,1]} w(x) - \min_{x\in[0,1]} v(x).$$

■

Bem. Es genügt die schwächere Voraussetzung

$$\int_{0}^{\infty} \frac{s}{\varphi(s)} ds > \max_{x\in[0,1]} w(x) - \max_{x\in[0,1]} v(x).$$

Satz 29 (Satz von NAGUMO) Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, v sei eine Unterfunktion und w eine Oberfunktion zu (N) mit $v \leq w$. Weiter genüge f relativ zu v und w einer NAGUMO-Bedingung. Dann hat (N) eine Lösung.

Beweis (Abschneide- und Fortsetzungstechnik) Betrachte $F : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y,p) := \begin{cases} f(x,v(x),p) - \frac{-u+v(x)}{1-u+v(x)}\varphi(|p|) & u \leq v(x) \\ f(x,u,p) & v(x) \leq u \leq w(x) \\ f(x,w(x),p) + \frac{u-w(x)}{1+u-w(x)}\varphi(|p|) & u \geq w(x) \end{cases}$$

F ist stetig. Zu φ, v und w sei M wie in Satz 27 (Satz von SCORZA DRAGONI und

$$k := \max\{M, ||v'||_\infty, ||w'||_\infty\}.$$

Weiter sei $h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit

$$h(s) = \begin{cases} 1 & |s| \leq k \\ 0 & |s| \geq k+1 \end{cases}$$

und $|h(x)| \leq 1$ $(x \in \mathbb{R})$. Betrachte nun

$$G : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad G(x,u,p) := h(p)F(x,u,p).$$

G ist stetig und wegen

$$\begin{aligned} &|G(x,u,p)| \leq |h(p)| \cdot |F(x,u,p)| \\ &\leq \max\{|f(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{p})| + \varphi(|\tilde{p}|) : \tilde{x} \in (0,1], \tilde{u} \in [v(\tilde{x}), w(\tilde{x})], |\tilde{p}| \leq k+1\} \end{aligned}$$

beschränkt. Nach Satz 27 hat demnach das Randwertproblem

$$u''(x) = G(x,u(x),u'(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

eine Lösung $u : [0,1] \to \mathbb{R}$. Wir zeigen, daß u (N) löst:

Zunächst gilt $v \le u \le w$ auf $[0,1]$. Wäre z.B. $u(x) > w(x)$ für ein $x \in [0,1]$, so hätte wegen $v(0) \le u(0) = 0 \le w(0)$, $v(1) \le u(1) = 0 \le w(1)$ die Funktion $u - w$ in $(0,1)$ ein lokales, positives Maximum, etwa in x_0. Dort wäre also

$$u(x_0) > w(x_0), u'(x_0) = w'(x_0), u''(x_0) \le w''(x_0).$$

Insbesondere wäre $|u'(x_0)| \le k$, also $h(u'(x_0)) = 1$ und daher

$$\begin{aligned} u''(x_0) &= G(x_0, u(x_0), u'(x_0)) = F(x_0, u(x_0), u'(x_0)) \\ &= f(x_0, w(x_0), u'(x_0)) + \varphi(|u'(x_0)|) \cdot \frac{u(x_0) - w(x_0)}{1 + u(x_0) - w(x_0)} \\ &> f(x_0, w(x_0), u'(x_0)) = f(x_0, w(x_0), w'(x_0)) \ge w''(x_0), \end{aligned}$$

d.h. $u''(x_0) > w''(x_0)$. Widerspruch.

Ebenso zeigt man $v \le u$. Auf $[0,1]$ gilt also insgesamt

$$\begin{aligned} u''(x) &= G(x, u(x), u'(x)) = h(u'(x)) \cdot F(x, u(x), u'(x)) \\ &= h(u'(x)) \cdot f(x, u(x), u'(x)), \end{aligned}$$

also

$$|u''(x)| \le |f(x, u(x), u'(x))| \le \varphi(|u'(x)|).$$

Aus der Wahl von M folgt $|u'(x)| \le M \le k$ $(x \in [0,1])$, also $h(u'(x)) = 1$ $(x \in [0,1])$ und damit

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)).$$

Also ist u Lösung von (N). ∎

Bsp. Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Es gebe ein $c \in [0, \pi)$ mit

$$u \cdot (f(x,u) - f(x,0)) \ge -c^2 u^2 \qquad (x \in [0,1], u \in \mathbb{R}).$$

Dann besitzt (N) eine Lösung.

Satz 30 Es sei $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und für Konstanten $L, M \ge 0$ mit $\frac{L}{8} + \frac{M}{2} < 1$ gelte

$$|f(x,u,p) - f(x,\tilde{u},\tilde{p})| \le L|u - \tilde{u}| + M|p - \tilde{p}|$$

für $(x,u,p), (x,\tilde{u},\tilde{p}) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$. Dann ist (N) eindeutig lösbar.

Beweis Wir betrachten $E := C^1([0,1], \mathbb{R})$ und

$$T : E \to E, \qquad (Tu)(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t, u(t), u'(t)) dt$$

mit

$$G : [0,1]^2 \to \mathbb{R}, \qquad G(x,t) = \begin{cases} -(1-x)t & 0 \le t \le x \le 1 \\ -x(1-t) & 0 \le x \le t \le 1 \end{cases}$$

E sei normiert durch

$$||u|| := \max\{||u||_\infty, \frac{1}{4}||u'||_\infty\}.$$

Dann ist $(E, ||\cdot||)$ ein BANACH-Raum. Seien $u_1, u_2 \in E$ fest und $v_1 = Tu_1$ und $v_2 = Tu_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|v_1(x) - v_2(x)| &= |(Tu_1)(x) - (Tu_2)(x)| \\
&\leq \int_0^1 |G(x,t)(f(t, u_1(t), u_1'(t)) - f(t, u_2(t), u_2'(t)))| dt \\
&\leq \int_0^1 |G(x,t)|(L|u_1(t) - u_2(t)| + M|u_1'(t) + u_2'(t)|) dt \\
&\leq \int_0^1 |G(x,t)| dt (L||u_1 - u_2||_\infty + M||u_1 - u_2||_\infty).
\end{aligned}$$

Mit

$$\int_0^1 |G(x,t)| dt = -\int_0^1 G(x,t) dt = \frac{1}{2}x(1-x) \leq \frac{1}{8} \quad (x \in [0,1])$$

gilt also

$$||v_1 - v_2||_\infty \leq \frac{1}{8}(L||u_1 - u_2||_\infty + M||u_1' - u_2'||_\infty).$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
|v_1'(x) - v_2'(x)| &= \int_0^1 |G_x(x,t)(f(t, u_1(t), u_1'(t)) - f(t, u_2(t), u_2'(t)))| dt \\
&\leq \int_0^1 |G_x(t,x)| dt \cdot (L||u_1 - u_2||_\infty + M||u_1' - u_2'||_\infty).
\end{aligned}$$

Mit

$$\int_0^1 |G_x(t,x)| dt = \int_0^x t\, dt + \int_x^1 (1-t) dt \leq \frac{1}{2} \quad (x \in [0,1])$$

gilt also

$$||v_1' - v_2'||_\infty \leq \frac{1}{2}(L||u_1 - u_2||_\infty + M||u_1' - u_2'||_\infty).$$

Insgesamt gilt also:

$$\begin{aligned}
||v_1 - v_2|| &= \max\{||v_1 - v_2||_\infty, \frac{1}{4}||v_1' - v_2'||_\infty\} \\
&\leq \frac{L}{8}\underbrace{||u_1 - u_2||_\infty}_{\leq ||u_1 - u_2||} + \frac{M}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}||u_1' - u_2'||}_{\leq ||u_1 - u_2||} \\
&\leq \left(\frac{L}{8} + \frac{M}{2}\right) ||u_1 - u_2||.
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\frac{L}{8} + \frac{M}{2} < 1$ ist, ist T auf E eine Kontraktion und somit folgt die Behauptung mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach. ■

Bem. Für $[a, b]$ statt $[0, 1]$ transformiert sich die obige Bedingung zu

$$\frac{L}{8}(b-a)^2 + \frac{M}{2}(b-a) < 1.$$

Bsp. Betrachte das Randwertproblem (N) mit

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,u,p) = cx^2 \cos u \cos p$$

für $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
&|f(x,u,p) - f(x,\tilde{u},\tilde{p})| = x^2|c| \cdot |\cos u \cos p - \cos \tilde{u} \cos \tilde{p}| \\
= \;& x^2|c| \cdot |\cos u \cos p - \cos u \cos \tilde{p} + \cos u \cos \tilde{p} - \cos \tilde{u} \cos \tilde{p}| \\
\leq \;& |c| \cdot (|\cos u \cdot (\cos p - \cos \tilde{p})| + |\cos \tilde{p}(\cos u - \cos \tilde{u})|) \\
\leq \;& |c| \cdot |p - \tilde{p}| + |c| \cdot |u - \tilde{u}|.
\end{aligned}$$

Damit können wir $M = L = |c|$ wählen und nach dem obigen Satz ist das Randwertproblem eindeutig lösbar, falls gilt $|c| < \frac{8}{5}$.

12 Die Schießfunktion

Def. 13 Es sei $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und Lipschitz-stetig in der zweiten und dritten Variablen. Zu $s \in \mathbb{R}$ sei y_s die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \qquad y(0) = 0, y'(0) = s.$$

Dann heißt

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(s) := y_s(1)$$

Schießfunktion zur Differentialgleichung des obigen Anfangswertproblems.

Bem.

- h ist stetig.

- Die Funktion $u(x) := y_s(x)$ ist offensichtlich genau dann Lösung des Randwertproblems

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

wenn $h(s) = 0$ ist.

Satz 31 (Satz von HERZOG-LEMMERT) Es sei $C \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine stetige Funktion $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, LIPSCHITZ-stetig in der zweiten Variablen mit LIPSCHITZ-Konstante $L \leq \pi^2 + \varepsilon$, so daß C die Nullstellenmenge der zum Randwertproblem

$$u''(x) = f(x, u(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

gehörigen Schießfunktion ist.

Beweis Sei $q : [0,1] \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig. Wir betrachten das Randwertproblem

$$u''(x) = -\pi^2 u(x) + q(x, u(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Ist u Lösung dieses Randwertproblems, so gilt notwendig

$$0 = \int_0^1 \sin(\pi x)(u''(x) + \pi^2 u(x))dx = \int_0^1 \sin(\pi x) q(x, u(x))dx,$$

also $q(x, u(x)) = 0$ $(x \in [0,1])$. Damit ist notwendig $u(x) = \alpha \sin(\pi x)$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

Für $C = \emptyset$ folgt die Aussage des Satzes durch die Wahl von $q = 1$. Sei $C \neq \emptyset$ und

$$h : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x,y) := \inf_{c \in C} \frac{|\sin(\pi x)c - \pi y|}{1 + |c|}.$$

Offensichtlich gilt $h \geq 0$ auf $[0,1] \times \mathbb{R}$. Für $y, \tilde{y} \in \mathbb{R}$, $x, \tilde{x} \in [0,1]$ und $c \in C$ gilt weiter

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+|c|}|\cdot \sin(\pi x)c - \pi y| - \frac{1}{1+|c|}|\cdot \sin(\pi \tilde{x})c - \pi \tilde{y}| \\
&\leq \frac{1}{1+|c|}|\cdot (\sin(\pi x) - \sin(\pi \tilde{x}))c - \pi(y - \tilde{y})| \\
&\leq \frac{|c|}{1+|c|} \cdot |\sin(\pi x) - \sin(\pi \tilde{x})| + \frac{\pi}{1+|c|} \cdot |y - \tilde{y}| \\
&\leq \pi(|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & h(x,y) \leq \pi(|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|) + \frac{1}{1+|c|}|\sin(\pi \tilde{x})c - \pi \tilde{y}| \\
\Longrightarrow \quad & h(x,y) - \pi(|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|) \leq h(\tilde{x}, \tilde{y}) \\
\Longrightarrow \quad & h(x,y) - h(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \pi(|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|).
\end{aligned}$$

Vertauschen der Argumente liefert

$$|h(x,y) - h(\tilde{x},\tilde{y})| \le \pi(|x-\tilde{x}| + |y-\tilde{y}|).$$

Damit ist h stetig auf $[0,1] \times \mathbb{R}$ und LIPSCHITZ-stetig bezüglich y zur LIPSCHITZ-Konstanten π.

Betrachte nun

$$f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := -\pi^2 y + \frac{\varepsilon}{\pi} h(x,y).$$

Aus den Eigenschaften von h folgt: f ist stetig auf $[0,1] \times \mathbb{R}$ und LIPSCHITZ-stetig bezüglich y zur LIPSCHITZ-Konstanten $L = \pi^2 + \frac{\varepsilon}{\pi}\pi = \pi^2 + \varepsilon$. Sei N die Nullstellenmenge der zu f gehörenden Schießfunktion. Dann gilt:

1. Für jedes $s \in C$ ist $u(x) := \frac{s}{\pi}\sin(\pi x)$ eine Lösung des Randwertproblems

   $$u''(x) = f(x, u(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

   und wegen $u'(0) = s$ gilt $s \in N$, also gilt $C \subseteq N$.

2. Ist $s \in N$, so ist die Lösung des Anfangswertproblems

   $$u''(x) = f(x,u(x)) = -\pi^2 u(x) + \frac{\varepsilon}{\pi} h(x, u(x)), \qquad u(0) = u'(0) = 0$$

   auch Lösung von

   $$u''(x) = f(x, u(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

   Also ist insbesondere $u(x) = \alpha \sin(\pi x)$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Wegen $u'(0) = s$ gilt $u(x) = \frac{s}{\pi}\sin(\pi x)$. Zu zeigen ist $s \in C$. Wegen $h(x, u(x)) = 0$ $(x \in [0,1])$ gilt

   $$0 = h(\frac{1}{2}, \frac{s}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}) = u(\frac{1}{2}) = \inf_{c \in C} \frac{|c-s|}{1+|c|}.$$

   Damit existiert eine Folge (c_n) in C mit

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n - s|}{1 + |c_n|} = 0.$$

   Wegen $\lim\limits_{|c|\to\infty} \frac{|c-s|}{1+|c|} = 1$ ist (c_n) beschränkt und es gilt $c_n \xrightarrow{n\to\infty} s$. Da C abgeschlossen ist, folgt $s \in C$, also $N \subseteq C$.

Insgesamt gilt also $N = C$, was zu zeigen war. ∎

Bem.

- Insbesondere gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Randwertproblem mit genau n Lösungen, indem man z.B. die abgeschlossene Menge $C = \{1, 2, \ldots, 128\}$ betrachtet.

- Ist $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ LIPSCHITZ-stetig in der zweiten Veränderlichen zu einer Konstanten $L < \pi^2$, so ist das Randwertproblem

$$u''(x) = f(x, u(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

eindeutig lösbar.

Satz 32 Seien $a, b \in C([0,1], \mathbb{R})$ derart, daß das lineare Randwertproblem

$$w''(x) = a(x)w(x) + b(x)w'(x), \qquad w(0) = w(1) = 0$$

nur trivial lösbar ist. Dann gilt:

1. Das Randwertproblem

$$w''(x) = a(x)w(x) + b(x)w'(x) + h(x), \qquad w(0) = w(1) = 0$$

ist für jedes $h \in C([0,1], \mathbb{R})$ eindeutig lösbar und es existiert eine von h unabhängige Konstate α mit

$$\max\{||w||_\infty, ||w'||_\infty\} \leq \alpha ||h||_\infty.$$

2. Das Randwertproblem

$$w''(x) = a(x)w(x) + b(x)w'(x), \qquad w(0) = \eta_0, w(1) = \eta_1$$

ist für jede Wahl von $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar und die Lösung hängt stetig von η_0 und η_1 ab.

Beweis

1. Sei $p(x) = \exp(-\int\limits_0^x b(t)dt)$ und $q(x) = -p(x)a(x)$. Dann ist

$$Lw := (pw')' + qw = w'' - aw - bw'.$$

Sei $G : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ die zugehörige GREENsche Funktion. Dann ist

$$w(x) = \int\limits_0^1 G(x,t)p(t)h(t)dt$$

die Lösung von

$$w''(x) = a(x)w(x) + b(x)w'(x) + h(x), \qquad w(0) = w(1) = 0$$

und es gilt

$$|w(x)| \leq \int\limits_0^1 |G(x,t)| \cdot |p(t)| \cdot |h(t)| dt \leq \alpha_1 ||h||_\infty,$$

$$|w'(x)| \leq \int\limits_0^1 |G_x(x,t)| \cdot |p(t)| \cdot |h(t)| dt \leq \alpha_2 ||h||_\infty.$$

Für $\alpha := \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ gilt das gewünschte.

2. Sei $\{u, v\}$ ein Fundamentalsystem von

$$w''(x) = a(x)w(x) + b(x)w'(x)$$

mit $u(1) \neq 0, u(0) = 0, v(0) \neq 0, v(1) = 0$ (vgl. Satz 13). Dann ist

$$w(x) := \frac{\eta_1}{u(1)}u(x) + \frac{\eta_0}{v(0)}v(x)$$

die Lösung von

$$w''(x) = a(x)w(x) + b(x)w'(x) \qquad w(0) = \eta_0, w(1) = \eta_1.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}||w|| &= ||w||_\infty + ||w'||_\infty \\ &= ||\frac{\eta_1}{u(1)}u + \frac{\eta_0}{v(0)}v||_\infty + ||\frac{\eta_1}{u(1)}u' + \frac{\eta_0}{v(0)}v'||_\infty \\ &\leq |\frac{\eta_1}{u(1)}|(||u||_\infty + ||u'||_\infty) + |\frac{\eta_0}{v(0)}|(||v||_\infty + ||v'||_\infty) \\ &\leq \gamma(|\eta_1| + |\eta_0|) = \gamma||(\eta_0, \eta_1)||_0.\end{aligned}$$

Damit ist w stetig in (η_0, η_1).

■

Satz 33 (Satz von PEROW) Sei $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ lokal LIPSCHITZ-stetig in (y, p). Weiter seien $a, b \in C([0,1], \mathbb{R})$ und es gelte

1. $\lim\limits_{|y|+|p|\to\infty} \dfrac{||f(\cdot, y, p) - ay - bp||_\infty}{|y| + |p|} = 0$

2. Das Randwertproblem

$$w''(x) = a(x)w(x) + b(x)w'(x) \qquad w(0) = w(1) = 0$$

ist nur trivial lösbar.

Dann gilt: Das Randwertproblem

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \qquad u(0) = \eta_0, u(1) = \eta_1$$

ist für alle $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$ lösbar.

Beweis Sei $\eta_0 \in \mathbb{R}$ fest. Zu $\varepsilon \in (0,1]$ existiert ein $r > 0$ mit

$$|f(x, y, p) - a(x)y - b(x)p| \leq \varepsilon(|y| + |p|) \qquad (x \in [0,1], |y| + |p| > r).$$

Sei $g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x, y, p) := \begin{cases} f(x, y, p) & |y| + |p| > r \\ \frac{|y|+|p|}{r} f(x, \frac{ry}{|y|+|p|}, \frac{rp}{|y|+|p|}) & 0 < |y| + |p| \leq r \\ 0 & y = p = 0 \end{cases}$$

und $h : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(x,y,p) := f(x,y,p) - g(x,y,p)$. g und h sind stetig auf $[0,1] \times \mathbb{R}^2$ und es gilt

$$|g(x,y,p) - a(x)y - b(x)p| \leq \varepsilon(|y| + |p|)$$

für $(x,y,p) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$. Weiter gilt

$$|h(x,y,p)| \leq 2(1 + \max_{|\xi|+|\eta|\leq r} ||f(\cdot,\xi,\eta)||_\infty) =: k(r)$$

$((x,y,p) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2)$. Sei nun $\varepsilon = 1$ und r_1 das zu ε gehörige r. Betrachte das Anfangswertproblem

$$v''(x) = f(x, v(x), v'(x)), \qquad v(0) = \eta_0, v'(0) = s.$$

Dieses Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar, denn

$$\begin{aligned} |f(x,y,p)| &\leq |g(x,y,p)| + |h(x,y,p)| \\ &\leq (1 + ||a||_\infty + ||b||_\infty)(|y| + |p|) + k(r_1) \end{aligned}$$

$((x,y,p) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2)$. Wir erhalten zudem eine stetige Schießfunktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(s) = v(1,s).$$

Es gibt nun Konstanten $k_1, k_2 > 0$ mit

$$||v(\cdot,s)||_\infty + ||v'(\cdot,s)||_\infty \leq k_1|s| + k_2 \qquad (x \in [0,1], s \in \mathbb{R}).$$

Sei nun $\varepsilon \in (0,1)$ mit zugehörigen r, g und h und $\beta = \alpha\varepsilon k_1 < 1$ mit dem α aus Satz 32. Weiter sei $\gamma = \alpha\varepsilon k_2 + \alpha k(r)$. $w(x,s)$ sei die Lösung von

$$w'' = aw + bw', \qquad w(0) = \eta_0, w(1) = h(s).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} v''(x,s) - w''(x,s) =& g(x, v(x,s), v'(x,s)) + h(x, v(x,s), v'(x,s)) \\ &- a(x)w(x,s) - b(x)w'(x,s) \\ =& a(x)(v(x,s) - w(x,s)) + b(x)(v'(x,s) - w'(x,s)) \\ &+ g(x, v(x,s), v'(x,s)) - a(x)v(x,s) - b(x)v'(x,s) \\ &+ h(x, v(x,s), v'(x,s)) \end{aligned}$$

und $v(0,s) - w(0,s) = v(1,s) - w(1,s) = 0$. Nach Satz 32 gilt damit

$$\begin{aligned} & |v'(x,s) - w'(x,s)| \leq \alpha||g(\cdot, v(\cdot,s), v'(\cdot,s)) - av(\cdot,s) - bv'(\cdot,s) \\ & \qquad\qquad + h(\cdot, v(\cdot,s), v'(\cdot,s))||_\infty \\ \Longrightarrow \quad & |v'(x,s) - w'(x,s)| \leq |\varepsilon(||v(\cdot,s)||_\infty + ||v'(\cdot,s)||_\infty) + k(r)| \\ & \qquad\qquad \leq \alpha\varepsilon k_1|s| + \alpha\varepsilon k_2 + \alpha k(r). \end{aligned}$$

Für $x = 0$ folgt daraus

$$|s - w'(0,s)| \leq \beta|s| + \gamma \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Nach Satz 32 ist $s \mapsto w'(0,s)$ stetig, insgesamt also surjektiv. Da also die Schießfunktion von

$$w'' = aw + bw' \qquad w(0) = \eta_0, w'(0) = s$$

surjektiv ist, ist auch h surjektiv und damit existiert auch ein $s \in \mathbb{R}$ mit $h(s) = \eta_1$. ∎

Bem.

- Dieser Satz gilt auch, wenn f nur stetig ist. In diesem Fall ist er eine Verallgemeinerung des Satzes von SCORZA-DRAGONI.
- Erfüllt f die Voraussetzungen des obigen Satzes und ist $g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, lokal LIPSCHITZ-stetig in (y,p) und beschränkt, so erfüllt auch $f+g$ die Voraussetzungen.

Bsp. Das Randwertproblem

$$u''(x) = \sqrt[4]{1+u^2(x)} + u'(x) + x \cdot \sin(u(x)u'(x)) \qquad u(0) = u(1) = 0$$

hat eine Lösung.
Bew.: Sei $b = 1, a = 0$. Dann gilt:

$$\frac{|\sqrt[4]{1+y^2} + p + x \cdot \sin(yp) - p|}{|y| + |p|} \le \frac{1}{\sqrt{|y|+|p|}} \sqrt[4]{\frac{1+y^2}{(|y|+|p|)^2}} + \frac{1}{|y|+|p|}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{|y|+|p|}} \sqrt[4]{\frac{1}{(|y|+|p|)^2} + 1} + \frac{1}{|y|+|p|} \xrightarrow{|y|+|p| \to \infty} 0.$$

Außerdem hat das Randwertproblem

$$w''(x) = w'(x), \qquad w(0) = w(1) = 0$$

nur die triviale Lösung. Damit folgt die Behauptung aus Satz 33. ∎

Satz 34 Sei $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen. $\lambda_k \le \lambda_{k+1}$ seien zwei aufeinanderfolgende Eigenwerte der STURMschen Eigenwertaufgabe

$$(Lu)(x) + \lambda u(x) = 0 \qquad R_a u = R_b u = 0.$$

Weiter gebe es $\mu_k, \mu_{k+1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_k < \mu_k \le f_u(x,u) \le \mu_{k+1} < \lambda_{k+1} \qquad ((x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R})$$

oder $L, \mu_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$-L \le f_u(x,u) \le \mu_1 < \lambda_1 \qquad ((x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}).$$

Dann gilt: Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} (Lu)(x) + f(x,u(x)) &= 0 \\ R_a u = u(a)\cos\alpha - p(a)u'(a)\sin\alpha &= 0 \\ R_b u = u(b)\cos\beta - p(b)u'(b)\sin\beta &= 0 \end{aligned}$$

ist eindeutig lösbar und die zugehörige Schießfunktion ist streng monoton mit Mindest- bzw. Höchststeigung.

Beweis Setzt man $y_1 = pu', y_2 = u$, so ist das Randwertproblem äquivalent zum System

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q(x)y_2(x) - f(x, y_2(x)) \\ \frac{1}{p(x)} y_1(x) \end{pmatrix}$$
$$y_2(a)\cos\alpha - y_1(a)\sin\alpha = 0$$
$$y_2(b)\cos\beta - y_1(b)\sin\beta = 0.$$

Da also $(y_1(a), y_2(a))$ senkrecht auf $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ steht, muß notwenig $(y_1(a), y_2(a) = s(\cos\alpha, \sin\alpha)$ für ein $s \in \mathbb{R}$ gelten. Finden wir zum Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q(x)y_2(x) - f(x, y_2(x)) \\ \frac{1}{p(x)} y_1(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(a) \\ y_2(a) \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

ein s derart, daß auch $(y_1(b), y_2(b)) = \gamma(\cos\beta, \sin\beta)$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, dann ist das zu diesem s gehörige u eine Lösung des ursprünglichen Randwertproblems.

Nach Voraussetzung ist f stetig partiell differenzierbar auf $[a, b]$, f_u also dort beschränkt und f damit LIPSCHITZ-stetig, so daß $(*)$ für jedes $s \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist. Sei $y : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, y = y(x, s)$ die Lösung. Für $z := \frac{\partial}{\partial s} y$ gilt

$$z'(x) = \begin{pmatrix} 0 & -q(x) - f_u(x, y_2(x)) \\ \frac{1}{p(x)} & 0 \end{pmatrix}, \qquad z(a) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Setzt man $v(x) = z_2(x)$, so folgt $p(x)v'(x) = z_1(x)$ und

$$(Lv)(x) + f_u(x, u(x))v(x) = 0, \qquad v(a) = \sin\alpha, v'(a) = \frac{1}{p(x)} \cos\alpha.$$

Weiter ist $v(b) = \frac{\partial}{\partial s} u(b, s), v'(b) = \frac{\partial}{\partial s} u'(b, s)$.
Betrachte nun die Schießfunktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(s) = u(b, s)\cos\beta - u'(b, s)p(b)\sin\beta.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} h'(s) &= \frac{\partial}{\partial s} u(b, s)\cos\beta - \frac{\partial}{\partial s} u'(b, s)p(b)\sin\beta \\ &= v(b)\cos\beta - v'(b)p(b)\sin\beta. \end{aligned}$$

Sei ψ die Prüfertransformierte von

$$(Lv)(x) + f_u(x, u(x)) = 0, \qquad v(a) = \sin\alpha, v'(a) = \frac{1}{p(a)} \cos\alpha$$

und φ die Prüfertransformierte von

$$(Lv)(x) + \lambda v(x) = 0, \qquad v(a) = \sin\alpha, v'(a) = \frac{1}{p(a)} \cos\alpha.$$

Dann gilt also

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{1}{p(x)} \cos^2 \varphi(x) + (q(x) + \lambda) \sin^2 \varphi(x), & \varphi(a) &= \alpha, \\
\psi'(x) &= \frac{1}{p(x)} \cos^2 \psi(x) + (q(x) + f_u(x, u(x))) \sin^2 \psi(x), & \psi(a) &= \alpha.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\lambda_k < \mu_k \leq f_u(x, u) \leq \mu_{k+1} < \lambda_{k+1} \qquad ((x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}).$$

Daraus folgt mit Satz 20

$$\begin{aligned}
\varphi(b, \lambda_k) = \beta + (k-1)\pi &< \varphi(b, \mu_k) \leq \psi(b) \\
&\leq \varphi(b, \mu_{k+1}) < \beta + k\pi = \varphi(b, \lambda_{k+1}),
\end{aligned}$$

also

$$(k-1)\pi < \varphi(b, \mu_k) - \beta \leq \psi(b) - \beta \leq \varphi(b, \mu_{k+1}) - \beta < k\pi.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
h'(s) &= v(b) \cos \beta - v'(b) p(b) \sin \beta \\
&= \varrho(b) \sin \psi(b) \cos \beta - \varrho(b) \cos \psi(b) \sin \beta \\
&= \varrho(b) \sin(\psi(b) - \beta).
\end{aligned}$$

Man kann nun nachrechnen, daß $\varrho(b) \geq E_k > 0$ ist, wobei E_k nur von p, q, μ_k und μ_{k+1} abhängt. Ist k ungerade, so gilt weiter

$$\sin(\psi(b) - \beta) \geq \min\{\sin(\varphi(b, \mu_k) - \beta), \sin(\varphi(b, \mu_{k+1}) - \beta)\} =: F_k > 0,$$

also $h'(s) \geq E_k F_k > 0$ $(s \in \mathbb{R})$. Für k gerade gilt entsprechend $h'(s) \leq -E_k F_k < 0$ $(s \in \mathbb{R})$. In beiden Fällen hat h genau eine Nullstelle, das fragliche Randwertproblem also genau eine Lösung.

Der Fall

$$-L \leq f_u(x, u) \leq \mu_1 < \lambda_1 \qquad ((x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R})$$

geht in wesentlichen analog. ∎

13 Monotoniemethoden bei Integralgleichungen

Def. 14 Sei Ω durch eine reflexive, antisymmetrische, transitive Relation $\leq$ geordnet. $z \in \Omega$ heißt *Supremum* [*Infimum*] von $M \subseteq \Omega$, falls gilt:

$$x \leq [\geq] z \ (x \in M) \qquad \text{und} \qquad x \leq [\geq] \tilde{z} \ (m \in M) \quad \Longrightarrow \quad z \leq [\geq] \tilde{z}.$$

1. Ω heißt *Verband*, wenn zu $x, y \in \Omega$ stets $\inf\{x, y\}$ und $\sup\{x, y\}$ in Ω existieren.

2. Ω heißt *vollständiger* Verband, wenn für jede Menge $\emptyset \neq M \subseteq \Omega$ stets $\sup M$ und $\inf M$ in Ω existieren.

Bsp.

- $\Omega := (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Verband, aber kein vollständiger Verband, denn z.B. $\sup(0,1) = 1 \notin \Omega$. Dagegen ist $[0,1]$ ein vollständiger Verband.
- Ist Ω eine Menge von Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$, so werde Ω geordnet durch

  $$u \leq v \qquad :\Longleftrightarrow \qquad u(x) \leq v(x) \ (x \in [a,b]).$$

  Betrachten wir die Menge $\Omega := \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ mit

  $$\begin{aligned} f_1 &: [0,1] \to \mathbb{R} & f_1(x) &:= \frac{1}{2} \\ f_2 &: [0,1] \to \mathbb{R} & f_2(x) &:= x \\ f_3 &: [0,1] \to \mathbb{R} & f_3(x) &:= 1 \\ f_4 &: [0,1] \to \mathbb{R} & f_4(x) &:= 0. \end{aligned}$$

  Wegen $f_2 \leq f_3$ und $f_1 \leq f_3$ gilt z.B. $\sup\{f_1, f_2\} = f_3$. Ω ist ein Verband.
- $\Omega := \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) : ||f||_\infty \leq 1\}$ ist ein Verband: Seien $u, v \in \Omega$. Dann gilt $w = \sup\{u, v\}$ für

  $$w : [0,1] \to [-1,1], \qquad w(x) := \max\{u(x), v(x)\}.$$

  Ω ist jedoch kein vollständiger Verband.

Satz 35 (Fixpunktsatz von Tarski) Sei $\Omega \neq \emptyset$ ein vollständiger Verband und $\Phi : \Omega \to \Omega$ monoton wachsend. Dann hat Φ einen Fixpunkt.

Satz 36 Seien $L \geq 0$, $c, C \in \mathbb{R}$ mit $c \leq C$. Weiter sei Ω die Menge aller Lipschitz-stetigen Funktionen $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $c \leq u(x) \leq C$ $(x \in [0,1])$. Ω sei geordnet durch

$$u \leq v \qquad :\Longleftrightarrow \qquad u(x) \leq v(x) \ (x \in [0,1]).$$

Dann ist Ω ein vollständiger Verband.

Bem. Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und durch $\beta > 0$ beschränkt. Ω sei die Menge aller Lipschitz-stetigen Funktionen $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, die durch $\frac{\beta}{8}$ beschränkt sind. Dann bildet der Operator

$$T : \Omega \to \Omega, \qquad (Tu)(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t, u(t)) dt$$

Ω in sich ab. Ist f in y monoton fallend, so ist T wachsend und da Ω ein vollständiger Verband ist, hat T einen Fixpunkt, d.h. das Randwertproblem

$$u''(x) = f(x, u(x)) \qquad u(0) = u(1) = 0$$

hat eine Lösung. Dies sagt zwar bereits der Satz von Scorza-Dragoni, wurde jedoch hier ohne Verwendung des Fixpunktsatzes von Schauder gezeigt.

Satz 37 Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt durch $\beta \in \mathbb{R}$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(0) = y_0$$

eine Lösung auf $[0,1]$.

Index