Randwertprobleme

Manuel Kauers
nach einer Vorlesung von
Dr. G. Herzog

21. Oktober 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einführende Beispiele **1**

2 Grundlagen aus der Funktionalanalysis **5**

3 Stetige, selbstadjungierte, kompakte Operatoren **9**

4 Sturmsche Randwertaufgaben **11**

5 Die Greensche Funktion eines Randwertproblems **14**

6 Die Strumsche Eigenwertaufgabe **15**

7 Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen **17**

8 Die Prüfertransformation **19**

9 Die Sätze von Sturm **20**

10 Nochmals die Sturmsche Eigenwertaufgabe **22**

11 Nichtlineare Randwertprobleme **23**

12 Die Schießfunktion **26**

13 Monotoniemethoden bei Integralgleichungen **29**

1 Einführende Beispiele

Bsp.

- Es sei $u(x,t)$ die Auslenkung einer eingespannten *Saite* am Ort $x \in [0,\pi]$ zur Zeit $t \geq 0$. $p > 0$ sei der *Elastizitätsmodul* und $\varrho > 0$ die Dichte des Saitenmaterials. Dann gilt

$$p \cdot u_{xx} = \varrho \cdot u_{tt}, \qquad u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0.$$

Nach geeigneter Normierung (betrachte $v(x,t) := u(x,\tau t)$) kann $\varrho = p = 1$ angenommen werden und man erhält das Randwertproblem

$$u_{xx} = u_{tt}, \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Der *Separationsansatz* $u(x,t) = v(x) \cdot g(t)$ liefert

$$v''(x) \cdot g(t) = v(x) \cdot g''(t).$$

Im Fall $u(x,t) \neq 0$ folgt

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)}.$$

Demnach sind $\frac{v''(x)}{v(x)}$ und $\frac{g''(t)}{g(t)}$ unabhängig von t und x. Es gibt also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} v''(x) &= \lambda \cdot v(x) \qquad (x \in [0,\pi]) \\ g''(t) &= \lambda \cdot g(t) \qquad (t \geq 0). \end{aligned}$$

Die Randbedingung $v(0) \cdot g(t) = v(\pi) \cdot g(t) = 0$ führt im Fall $g \neq 0$ auf $v(0) = v(\pi) = 0$. Diese Bedingungen sind nichttrivial nur für gewisse $\lambda \in \mathbb{R}$ zu erfüllen, da für $\lambda \geq 0$ das Randwertproblem

$$v''(x) = \lambda v(x), \qquad v(0) = v(\pi) = 0 \tag{$*$}$$

nur die triviale Lösung besitzt. Für $\lambda < 0$ erhält man

$$v(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

als Lösungen der Differentialgleichung in $(*)$. Die Randbedingungen fordern $c_1 = 0, c_2 \cdot \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$. Dies ist für $v \neq 0$ genau dann möglich, wenn $\sqrt{-\lambda} = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$, die diese Bedingung erfüllen, heißen *Eigenwerte* des Randwertproblems $(*)$. Die zugehörigen nichttrivialen Lösungen $v_n := \sin(nx)$ heißen *Eigenfunktionen* zu $(*)$ (vgl. S. 15). Für g ergibt sich

$$g(t) = a\cos(nt) + b\sin(nt),$$

so daß die sogenannten *Eigenschwingungen* von der Form

$$u_n(x,t) = \sin(nx) \cdot (a\cos(nt) + b\sin(nt))$$

sind. Hieraus erhält man durch Überlagerung Lösungen u der Form

$$u(x,t) = \sum_n \sin(nx) \cdot (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Es stellt sich die Frage, ob durch Wahl geeigneter a_n und b_n die so gefundenen Lösungen an Anfangsvorgaben $u(x,0) = \varphi(x)$ $(x \in [0,\pi])$ (Auslenkung der Saite zu Beginn) und $u_t(x,0) = \psi(x)$ $(x \in [0,\pi])$ (Geschwindigkeit der Saite zu Beginn) angepaßt werden können.

Dies führt auf die Frage nach einer Darstellung

$$\varphi(x) = \sum_n a_n \sin(nx), \qquad \psi(x) = \sum_n n b_n \cos(nx).$$

- Im Fall, daß nur ein Ende der Saite fest und das andere elastisch mit der Ruhelage verknüpft ist, lauten die Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = -hu(\pi,t) \qquad (t > 0)$$

für ein festes $h > 0$. Für v erhält man dann

$$v''(x) = \lambda v(x), \qquad v(0) = 0, v'(\pi) + hv(\pi) = 0.$$

Aus der zweiten Randbedingung folgt $v(x) = c\sin(\sqrt{-\lambda}x)$ und dies liefert durch Einsetzen in die erste

$$c \cdot \left(\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi) + h \cdot \sin(\sqrt{-\lambda}\cdot\pi)\right) = 0.$$

Dies führt auf die Gleichung

$$-\frac{\mu}{h} = \tan(\mu\pi) \qquad (\mu := \sqrt{-\lambda} > 0),$$

die abzählbar viele Lösungen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ hat, aus denen sich die Eigenwerte $\lambda_n = -\mu_n^2$ ergeben. Die zugehörigen Eigenschwingungen lauten dann:

$$\sin(\mu_n x) \cdot (a\cos(\mu_n t) + \sin(\mu_n t)).$$

- Wirkt auf die Saite zusätzlich eine äußere Kraft $Q(x,t)$, so verändert sich die Bewegungsgleichung zu

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) - Q(x,t), \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Q sei von der Form $Q(x,t) = \sum\limits_n Q_n(t) \cdot \sin(nx)$, wobei notwendig

$$Q_n(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi Q(x,t)\sin(nx)dx.$$

gilt. Sucht man eine Lösung u von der Form

$$u(x,t) = \sum_n g_n(t)\sin(nx),$$

so erhält man

$$-n^2 g_n(t) = g_n''(t) - Q_n(t).$$

Eine spezielle Lösung dieser Gleichung ist

$$\tilde{g}_n(t) := \frac{1}{n}\int\limits_0^t \sin(t-s)Q_n(s)ds$$

und die allgemeine Lösung lautet somit

$$g_n(t) = \tilde{g}_n(t) + a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt).$$

- Sind bei der betrachteten Saite sowohl p als auch ϱ vom Ort x abhängig, so lautet die Bewegungsgleichung

$$(p(x)u_x(x,t))_x = \varrho(x)u_{tt}(x,t).$$

Für homogene Randbedingungen führt der Separationsansatz hier auf

$$\begin{aligned} (pv')'(x) &= \lambda\varrho(x)v(x) && (x \in [0,\pi]) \\ g''(t) &= \lambda g(t) && (t \geq 0) \end{aligned}$$

mit entsprechenden Randbedingungen an v. Es wird sich zeigen (vgl. Satz 15 auf S. 15), daß das Problem

$$(pv')'(x) = \lambda\varrho(x)v(x), \qquad v(0) = v(\pi) = 0$$

für abzählbar viele $\lambda_n < 0$ mit $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$ nichttriviale Lösungen besitzt und daß wie oben speziell die Eigenschwingungen von der Gestalt

$$u_n(x,t) = v_n(x)\left(a_n\cos(\sqrt{-\lambda_n}t) + b_n\sin(\sqrt{-\lambda_n}t)\right)$$

sind und.

- Die schwingende *Membran*: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Ist an ∂G eine Membran befestigt, so genügen die Schwingungen der über G aufgespannten Membran der Differentialgleichung

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = u_{tt}.$$

Der Separationsansatz $u(x,y,t) = v(x,y)\cdot g(t)$ führt hier auf

$$\begin{aligned} \Delta v(x,y) &= \lambda v(x,y) && ((x,y) \in G), \\ v(x,y) &= 0 && ((x,y) \in \partial G), \\ g''(t) &= \lambda g(t) && (t \geq 0). \end{aligned}$$

Wieder sind Zahlen λ gesucht, für die die obere Gleichung nichttriviale Lösungen besitzt. Wieder sind diese λ negativ und die zugehörigen Eigenschwingungen sind von der Form

$$u(x,y,t) := v(x,y)\cdot\left(a\cos(\sqrt{-\lambda}t) + b\sin(\sqrt{-\lambda}t)\right).$$

Im Fall $G = (0,a)\times(0,b)$, also bei einer rechteckigen Membran, lassen sich die Eigenwerte explizit angeben:

$$\lambda = -\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) \qquad (m,n \in \mathbb{N}).$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen lauten dann

$$v(x,y) = \sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b}).$$

2 Grundlagen aus der Funktionalanalysis

Def. 1 Es sei H ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

1. $(x,y) = \overline{(y,x)}$ $(x,y \in H)$
2. $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ $(x,y,z \in H)$
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ $(x,y \in H, \alpha \in \mathbb{K})$
4. $(x,x) \in [0,\infty)$ $(x \in H)$
5. $(x,x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$

heißt *Skalarprodukt* (oder *Innenprodukt*) auf H. Ist $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf H, so heißt $(H,(\cdot,\cdot))$ *Innenproduktraum* (oder *Prä-*Hilbert*-Raum*).

Bem. Skalarprodukte haben folgende Eigenschaften:

- $(0,y) = 0$ $(y \in H)$
- Für jedes feste $y \in H$ ist die Abbildung $A : H \to \mathbb{K}, A(x) := (x,y)$ linear.
- $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x,y)$ $(x,y \in H, \alpha \in \mathbb{K})$
- $(z, x+y) = (z,x) + (z,y)$ $(x,y,z \in H)$.

Def. 2 Sei $(H,(\cdot,\cdot))$ ein Innenproduktraum. Dann heißt die Abbildung

$$||\cdot|| : H \to \mathbb{R}, \qquad ||x|| := \sqrt{(x,x)}$$

Norm auf H bezüglich $(\cdot,\cdot)$. $(H, ||\cdot||)$ heißt *normierter, linearer Raum*.

Bem. Ist $||\cdot||$ eine Norm auf H, so gilt:

- $|(x,y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$ $(x,y \in H)$
- $||x|| \geq 0$ $(x \in H)$ und $||x|| = 0 \iff x = 0$
- $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$ $(x \in H, \alpha \in \mathbb{K})$
- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ $(x,y \in H)$.

Def. 3 Ist $(H,(\cdot,\cdot))$ ein bezüglich der von $(\cdot,\cdot)$ induzierten Norm vollständiger Innenproduktraum, d.h. konvergiert in H jede Cauchy-Folge, so heißt H Hilbert*-Raum*. Ein Untervektorraum M von H heißt *Unterraum* von H. M heißt *abgeschlossen*, falls M als Teilmenge des normierten linearen Raumes $(H, ||\cdot||)$ abgeschlossen ist.

Bsp.

- Der Raum $\mathbb{K}^n$ versehen mit dem Standardskalarprodukt ist ein Hilbert-Raum.

- Der Raum $C([0,1],\mathbb{K})$ wird mit dem Skalarprodukt

$$(f,g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

zu einem Innenproduktraum. Er ist jedoch kein HILBERT-Raum. Betrachte dazu die Folge (f_n) mit

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & (x \in [\frac{1}{n}, 1]) \\ \sqrt{n} & (x \in [0, \frac{1}{n})). \end{cases}$$

Dies ist eine CAUCHY-Folge, die in $C([0,1],\mathbb{K})$ nicht konvergiert.

- Der Raum $L^2([a,b],\mathbb{K})$ aller auf $[a,b]$ meßbaren Funktionen f mit

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$$

ist ein HILBERT-Raum.

Bem. Ist M ein Unterraum von H, so ist auch $\overline{M}$ ein Unterraum von H.

Def. 4 Seien H ein Innenproduktraum und $x, y \in H$ mit $(x,y) = 0$. Dann heißen x und y aufeinander *senkrecht*. Schreibweise in diesem Fall $x \perp y$. Zu $x \in H$ sei

$$x^\perp := \{y \in H : (x,y) = 0\}.$$

Ist M ein Unterraum von H, so sei

$$M^\perp := \{y \in H : (x,y) = 0 \ (x \in M)\}.$$

Bem. Für jedes $x \in H$ ist $x^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H.

Satz 1 Sei $C \neq \emptyset$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines HILBERT-Raums H. Dann existiert in C genau ein Element kleinster Norm, also

$$\exists_1 \quad x_0 \in C \quad \forall \quad x \in C : \qquad ||x_0|| \leq ||x||.$$

Satz 2 Sei H ein HILBERT-Raum und M ein Unterraum von H. Dann gilt:

1. Jedes $x \in H$ besitzt eine eindeutig bestimmte Zerlegung $x = Px + Qx$ mit $Px \in M$ und $Qx \in M^\perp$.
2. Px und Qx sind die Elemente kleinsten Abstands zu x in M bzw. $M^\perp$.
3. Die Abbildungen $P : H \to M$ und $Q : H \to M^\perp$ sind linear.
4. $||x||^2 = ||Px||^2 + ||Qx||^2 \ (x \in H)$.

Bem. Ist $M \neq H$ ein abgeschlossener Unterraum von H, so existiert ein $y \neq 0$ mit $y \perp M$.

Satz 3 Sei H ein HILBERT-Raum und $L : H \to \mathbb{K}$ ein stetiges Funktional. Dann existiert genau ein $y \in H$ mit $Lx = (x, y)$ $(x \in H)$.

Bem. Dies gilt i.A. nicht mehr, wenn H kein HILBERT-Raum ist. Betrachte $H := C([0,1], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

und die Funktion

$$\varphi : H \to H, \qquad \varphi(f) := \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt.$$

Die Abbildung φ ist linear und stetig. Jedoch gibt es keine Funktion $g \in H$ mit

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt = \varphi(f) = (f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Def. 5 Es sei H ein Innenproduktraum. Eine Menge $U := \{u_j, j \in J\} \subseteq H$ heißt *Orthogonalsystem*, falls für $j \neq k$ gilt $(u_k, u_j) = 0$. Ist U ein Orthogonalsystem und gilt zusätzlich $||u|| = 1$ $(u \in U)$, so heißt U *Orthonormalsystem*. Sei U ein Orthonormalsystem. Zu $x \in H$ heißen die Zahlen (x, u) $(u \in U)$ FOURIER-*Koeffizienten* bezüglich U. U heißt *maximal*, falls es keine echte Obermege von U gibt, die ebenfalls Orthonormalsystem ist. U heißt *Orthonormalbasis*, falls gilt

$$x = \sum_{j \in J} (x, u_j)u_j \qquad (x \in H).$$

Bem. Ein Orthogonalsystem ist stets eine linear unabhängige Menge.

Satz 4 Es sei H ein Innenproduktraum und $\{u_j, j \in J\}$ ein Orthonormalsystem. Weiter sei F eine endliche Teilmenge von J und M_F die lineare Hülle von $\{u_j, j \in F\}$. Dann gilt

1. Ist $\varphi : J \to \mathbb{K}$ eine Funktion mit $\varphi(j) = 0$ $(j \neq F)$ und

   $$y = \sum_{j \in F} \varphi(j)u_j,$$

   so gilt $(y, u_j) = \varphi(j)$ $(j \in J)$ und $||y||^2 = \sum\limits_{j \in F} |\varphi(j)|^2$.

2. Sei $x \in H$ und $s_F(x) := \sum\limits_{j \in F} (x, u_j) \cdot u_j$. Dann gilt

   $$||x - s_F(x)|| < ||x - s|| \qquad (s \in M_F \setminus \{s_F(x)\})$$

   und

   $$\sum_{j \in F} |(x, u_j)|^2 \leq ||x||^2.$$

Def. 6 Sei J eine beliebige Indexmenge ($|J| = \infty$ zugelassen) und $\varphi : J \to [0, \infty)$ eine Funktion. Dann sei

$$\sum_{j \in J} \varphi(j) := \sup_{\substack{F \subseteq J \\ |F| < \infty}} \sum_{j \in F} \varphi(j).$$

Mit $l^2(J) := l^2(J, \mathbb{K})$ sei der Raum aller Funktionen $\varphi : J \to \mathbb{K}$ bezeichnet, für die gilt

$$\sum_{j \in J} |\varphi(j)|^2 < \infty$$

Bem.

- Für $\varphi \in l^2(J)$ ist $\{j \in J : \varphi(j) \neq 0\}$ nicht überabzählbar.
- Auf $l^2(J)$ wird durch

$$(\cdot, \cdot) : l^2(J) \times l^2(J) \to \mathbb{K}, \qquad (\varphi, \psi) := \sum_{j \in J} \varphi(j)\overline{\psi(j)}$$

  ein Skalarprodukt definiert.

Satz 5 $l^2(J)$ ist ein Hilbert-Raum.

Satz 6 Sei H ein Innenproduktraum und $U := \{u_j : j \in J\} \subseteq H$ ein Orthonormalsystem. M sei die lineare Hülle von U. Dann gilt

$$\sum_{j \in J} |(x, u_j)|^2 \leq ||x||^2 \qquad (x \in H).$$

Die Abbildung

$$\Phi : H \to l^2(J), \qquad \Phi(x) := ((x, u_j))_{j \in J}$$

ist linear und stetig. $\Phi|_{\overline{M}}$ ist normerhaltend und somit injektiv. Ist H ein Hilbert-Raum, so ist $\Phi|_{\overline{M}}$ zusätzlich surjektiv.

Satz 7 Es sei $\{u_j, j \in J\}$ ein Orthonormalsystem eines Innenproduktraums H. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\{u_j : j \in J\}$ ist eine Orthonormalbasis.
2. $\sum_{j \in J} |(x, u_j)|^2 = ||x||^2$ $(x \in H)$.

Ist H ein Hilbert-Raum, so sind die obigen Aussagen zusätzlich äquivalent zu

3. $\{u_j, j \in J\}$ ist maximal.
4. Die lineare Hülle M von $\{u_j : j \in J\}$ liegt dicht in H.

Bem. Ist H ein HILBERT-Raum und $\{u_j, j \in J\}$ eine Orthonormalbasis, so ist die Funktion

$$f : H \to l^2(J), \qquad f(x) := ((x, u_j))_{j \in J}$$

stetig, normerhaltend, linear und bijektiv. Eine stetige, lineare, bijektive Abbildung zwischen zwei HILBERT-Räumen heißt *Isomorphismus*. Man bezeichnet H und $l^2(J)$ daher auch als *isomorph*. Mit Hilfe des ZORNschen Lemmas läßt sich zeigen, daß jeder Innenproduktraum $H \neq \{0\}$ ein maximales Orthonormalsystem und damit insbesondere eine Orthonormalbasis besitzt. Somit ist jeder Hilbertraum H isomorph zu einem Raum $l^2(J)$. Man kann weiter zeigen, daß die Mächtigkeit von J eindeutig bestimmt ist.

3 Stetige, selbstadjungierte, kompakte Operatoren

In diesem Abschnitt sei H ein Innenproduktraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $T : H \to H$ ein linearer *Operator*.

Bem. T ist genau dann stetig, wenn die Menge

$$\{||Tx|| : x \in H, ||x|| = 1\}$$

beschränkt ist. In diesem Fall bezeichnet man

$$|||T||| := \sup_{\substack{x \in H \\ ||x||=1}} ||Tx||$$

als *Operatornorm* von T. Es gilt

$$||Tx|| \leq |||T||| \cdot ||x|| \qquad (x \in H).$$

Def. 7 T heißt *selbstadjungiert* (oder *hermitesch*), falls T linear und stetig ist und gilt

$$(Tx, y) = (x, Ty) \qquad (x, y \in H).$$

T heißt *kompakt*, falls für jede in H beschränkte Folge (x_n) eine in H konvergente Teilfolge von (Tx_n) existiert.

Bem. Ist $T : H \to H$ linear und kompakt, so ist T stetig.

Satz 8 Ist $T : H \to H$ selbstadjungiert, so gilt $|||T||| = \sup_{\substack{x \in H \\ ||x||=1}} |(Tx, x)|$

Def. 8 Sei H ein Innenproduktraum über $\mathbb{C}$ und $T : H \to H$ linear und stetig. Dann heißt

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \,\mathrm{id} \text{ ist nicht bijektiv}\}$$

das *Spektrum* von T.

Bem. Ist $\dim H < \infty$, so ist $\sigma(T)$ gerade die Menge der Eigenwerte von T. Im allgemeinen Fall ist $\sigma(T)$ nur eine Obermenge der Menge aller Eigenwerte. Wie üblich heißt λ *Eigenwert* von T, falls gilt:

$$\exists \quad x \in H \setminus \{0\} : \qquad Tx = \lambda x.$$

Bsp. Betrachte $H := C([a,b], \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$(f,g) := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

und den Operator

$$T : H \to H, \qquad (Tf)(t) := \int_a^t f(s)ds.$$

T ist stetig: Für $f \in H$ gilt:

$$\begin{aligned} ||Tf||^2 &= \int_a^b |(Tf)(t)|^2 dt = \int_a^b |\int_a^t f(s)ds|^2 dt \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |f(s)|ds \right)^2 dt = (b-a) \left(\int_a^b |f(s)|ds \right)^2 \\ \Longrightarrow \quad ||Tf|| &\leq \sqrt{b-a} \int_a^b 1|f(s)|ds = \sqrt{b-a} \cdot (1, |f|) \\ &\leq \sqrt{b-a} \cdot ||1|| \cdot || \, |f| \, || = (\sqrt{b-a}||1||)||f||. \end{aligned}$$

Es gilt $0 \in \sigma(T)$, da T nicht surjektiv ist. 0 ist aber kein Eigenwert von T: Angenommen, $f \in H \setminus \{0\}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Dann wäre

$$Tf = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \, t \in [a,b] : \int_a^t f(s)ds = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0.$$

Widerspruch!

Bem. Ist $T : H \to H$ stetig, linear und selbstadjungiert und ist λ ein Eigenwert von T, dann ist λ reell.

Satz 9 Sei $T : H \to H$ ein kompakter, linearer, selbstadjungierter Operator. Dann existiert ein Eigenwert λ_0 von T mit $|\lambda_0| = |||T|||$.

Bem. Ist x_0 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_0 aus obigem Satz und gilt $||x_0|| = 1$, so ist

$$|||T||| = |\lambda_0| = |(Tx_0, x_0)| = \sup_{\substack{x \in H \\ ||x|| = 1}} |(Tx, x)|.$$

Das Supremum ist also ein Maximum. Ist λ irgendein Eigenwert von T mit einem Eigenvektor x, $||x|| = 1$, so gilt

$$|\lambda| = |(Tx, x)| \leq |||T|||$$

Satz 10 Sei H ein unendlich dimensionaler Innenproduktraum und $T : H \to H$ ein selbstadjungierter, kompakter Operator. 0 sei kein Eigenwert von T. Dann existieren Folgen $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ in H mit folgenden Eigenschaften:

1. $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
2. $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ sind genau die Eigenwerte von T und u_n ist ein Eigenvektor zu λ_n.
3. $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ ist ein maximales Orthonormalsystem.
4. $Tu = \sum_{n=1}^{\infty} (Tu, u_n)\, u_n$ $(u \in H)$
5. Ist zusätzlich H ein HILBERT-Raum, so ist $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis, d.h. es gilt

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)\, u_n \qquad (x \in H)$$

4 STURMsche Randwertaufgaben

Es seien $r, p, q \in C([a,b], \mathbb{R})$ mit $p > 0$ auf $[a,b]$. Wir betrachten den selbstadjungierten, linearen *Differentialoperator* L, definiert durch

$$Lu := (p \cdot u')' + q \cdot u.$$

Für $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$ und $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$ heißen die Ausdrücke

$$R_a u = \alpha_0 u(a) + \alpha_1 p(a) u'(a)$$
$$R_b u = \beta_0 u(a) + \beta_1 p(b) u'(b)$$

Randoperatoren. Das Problem, zu gegebenen r, η_a, η_b Funktionen $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$(Lu)(x) = r(x), \qquad R_a u = \eta_a, R_b u = \eta_b \qquad (*)$$

zu finden, heißt STURM*sche Randwertaufgabe*. Eine Funktion $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Lösung*, falls u zweimal stetig differenzierbar ist und $(*)$ erfüllt. Im Fall $r = 0$, $\eta_a = \eta_b = 0$ spricht man vom zu $(*)$ gehörigen *homogenen* Randwertproblem.

Bsp. Sei $p = 1, q = 0, r(x) = x$ und $[a,b] = [0,1]$. Weiter seien $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ und $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Dann hat $(*)$ die Form

$$u''(x) = x \qquad u(0) = \eta_0, u(1) = \eta_1.$$

Eine Lösung der Differentialgleichung ist

$$u(x) = \frac{1}{6} x^3 + c_1 x + c_2.$$

Durch Wahl von $c_1 = \eta_1 - \eta_0 - \frac{1}{6}, c_2 := \eta_0$ erhält man eine Lösung des Randwertproblems.

Bem. Seien $a_0, a_1, r \in C([a,b],\mathbb{R})$. Jedes Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) &= r(x), \\ \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) &= \eta_a, \\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) &= \eta_b \end{aligned}$$

läßt sich auf die Form $(*)$ transformieren. Dazu setzt man

$$p(x) = \exp\Big(\int_a^x a_1(t)dt\Big).$$

Dann gilt $(u \in C^2([a,b],\mathbb{R}))$

$$\begin{aligned} (pu')' + \underbrace{pa_0}_{=:q} u &= p' \cdot u' + p \cdot u'' + pa_0 u \\ &= p \cdot a_1 \cdot u' + p \cdot u'' + p \cdot a_0 \cdot u \\ &= p \cdot (u'' + a_1 \cdot u' + a_0 \cdot u). \end{aligned}$$

Da die Differenz zweier Lösungen von $(*)$ das zugehörige homogene Randwertproblem löst, ist die Gesamtheit aller Lösungen von $(*)$ gegeben durch

$$u = u_s + u_h\,,$$

wobei u_s irgendeine feste Lösung von $(*)$ ist und u_h alle Lösungen des zugehörigen homogenen Randwertproblems durchläuft.

Sei nun u eine Lösung der Differentialgleichung $(Lu)(x) = r(x)$. Setzt man $y_1(x) = p(x)u'(x)$ und $y_2(x) = u(x)$, so ist

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= (p \cdot u')'(x) = -q(x) \cdot y_2(x) + r(x) \\ y_2'(x) &= u'(x) = \frac{y_1(x)}{p(x)}. \end{aligned}$$

Es gilt: $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lösung von $(Lu)(x) = r(x)$, wenn

$$\begin{pmatrix} pu' \\ u \end{pmatrix} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$$

das lineare System

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -q(x) \\ \frac{1}{q(x)} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r(x) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

löst. Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme folgt, daß die Gleichung $(Lu)(x) = 0$ zwei linear unabhängige Lösungen

$$u_1, u_2 : [a,b] \to \mathbb{R},$$

also ein Fundamentalsystem besitzt. Jede Lösung $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ von $(Lu)(x) = 0$ ist damit von der Form

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

für geeignete Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Satz 11 Das Randwertproblem $(*)$ ist genau dann für jede Wahl von r, η_a, η_b eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung $u = 0$ hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn für ein Fundamentalsystem $\{u_1, u_2\}$ gilt

$$\begin{vmatrix} R_a u_1 & R_a u_2 \\ R_b u_1 & R_b u_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bsp. Betrachte das Randwertproblem

$$u''(x) + u(x) = 1, \qquad u(0) = \eta_0, u(\pi) = \eta_\pi.$$

Lösungen von $u'' + u = 0$ sind die Funktionen

$$u : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Es gilt

$$u(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u(\pi) = 0.$$

Damit besitzt das homogene Randwertproblem

$$u''(x) + u(x) = 0, \qquad u(0) = 0, u(\pi) = 0$$

die Lösungen $u(x) = c \cdot \sin x$ $(c \in \mathbb{R})$. Betrachten wir nun das Randwertproblem

$$u''(x) + u(x) = 1, \qquad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$u(x) = 1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Wegen

$$\begin{aligned} u(0) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 + c_1 = 0 \\ u(\pi) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 - c_1 = 0 \end{aligned}$$

ist das Randwertproblem nicht lösbar.

Bem. Ist $A : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig und $Y : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ Matrixlösung von

$$Y'(x) = A(x) \cdot Y(x),$$

so gilt für die WRONSKI-Determinante $w(x) := \det Y(x)$ die Differentialgleichung

$$w'(x) = (\operatorname{Spur} A(x)) \cdot w(x),$$

also

$$w(x) = w(x_0) \cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} (\operatorname{Spur} A(s)) ds} \qquad (x \in [a, b])$$

für ein festes $x_0 \in [a, b]$. Insbesondere folgt aus $\operatorname{Spur} A(x) = 0$ $(x \in [a, b])$, daß w konstant ist. Diese Überlegung angewandt auf

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -q(x) \\ \frac{1}{p(x)} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

liefert für je zwei Lösungen $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ von $(Lu)(x) = 0$ ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$p(x) \cdot v'(x) \cdot u(x) - p(x) \cdot u'(x) \cdot v(x) = c \qquad (x \in [a, b]).$$

Es gilt: u und v bilden genau dann ein Fundamentalsystem von $(Lu)(x) = 0$, wenn $c \neq 0$ gilt.

5 Die GREENsche Funktion eines Randwertproblems

In diesem Abschnitt sei $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ ein bekanntes Fundamentalsystem von $(Lw)(x) = 0$. Gesucht ist eine Lösung von $(Lw)(x) = r(x)$. Bekanntlich existiert ein $c \neq 0$ mit

$$u(x) \cdot v'(x) - u'(x) \cdot v(x) = \frac{c}{p(x)} \qquad (x \in [a,b]).$$

Für jedes $t \in [a,b]$ ist dann

$$w_t(x) := \frac{1}{c} \cdot (u(t) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(t)) \qquad (x \in [a,b])$$

eine Lösung von $(Lw)(x) = 0$ mit $w_t(t) = 0$ und

$$p(t) \cdot w_t'(t) = \frac{p(t)}{c}(u(t) \cdot v'(t) - u'(t) \cdot v(t)) = 1$$

Satz 12 Die Funktion

$$u_s : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad u_s(x) := \int_a^x w_t(x) \cdot r(t)dt$$

ist eine Lösung von $(Lw)(x) = r(x)$ mit $u_s(a) = u_s'(a) = 0$.

Satz 13 Sei $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem von $(Lw)(x) = 0$ mit $R_a u = R_b v = 0$ und $R_a v \cdot R_b u \neq 0$. Dann ist die eindeutig bestimmte Lösung $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ des halbhomogenen Randwertproblems

$$(Lw)(x) = r(x) \qquad R_a w = R_b w = 0$$

gegeben durch

$$w(x) = \int_a^b G(x,t) r(t) dt$$

mit

$$G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad G(x,t) := \begin{cases} \frac{v(x)u(t)}{c} & a \leq t \leq x \leq b \\ \frac{v(t)u(x)}{c} & a \leq x \leq t \leq b \end{cases}$$

Die Lösung des inhomogenen Randwertproblems ist dann

$$w(x) + \frac{\eta_b}{R_b u} u(x) + \frac{\eta_a}{R_a v} v(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

Bem. Die Funktion G aus obigem Satz heißt GREEN*sche Funktion*. Sie hat die folgenden wesentlichen Eigenschaften:

- G ist stetig auf $[a,b]^2$.

- $G(x,t) = G(t,x)$ $((x,t) \in [a,b]^2)$.

Bsp. Sei $p = 1, q = 0, R_a w = w(a), R_b w = w(b)$. Wir betrachten also das Randwertproblem

$$w''(x) = r(x), \qquad w(a) = w(b) = 0.$$

Als Fundamentalsystem von $w'' = 0$ wählen wir

$$\begin{aligned} u &: [a,b] \to \mathbb{R} \qquad u(x) = x - a \\ v &: [a,b] \to \mathbb{R} \qquad v(x) = b - x. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$c := u(x) \cdot v'(x) - u'(x) \cdot v(x) = (x-a)(-1) - (b-x) = -(b-a).$$

Damit gilt:

$$G(x,t) = \begin{cases} -\frac{(b-x)\cdot(t-a)}{b-a} & a \le t \le x \le b \\ -\frac{(b-t)\cdot(x-a)}{b-a} & a \le x \le t \le b \end{cases}$$

6 Die STRUMsche Eigenwertaufgabe

Wir betrachten das Problem

$$(Lu)(x) = \lambda u(x) \qquad R_a u = R_b u = 0. \tag{P_λ}$$

Gesucht sind diejenigen $\lambda \in \mathbb{R}$, für die (P_λ) nicht eindeutig lösbar ist, für die also eine Funktion $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, $u \neq 0$ existiert, die (P_λ) genügt. Solche Zahlen λ heißen *Eigenwerte* und die Funktionen u heißen zu λ gehörende *Eigenfunktionen*.

Satz 14 Es sei $G : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ die zu (P_0) gehörige GREENsche Funktion. Weiter sei

$$T : C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}), \qquad (Tu)(x) := \int_a^b G(x,t)u(t)dt.$$

Dann gilt:

1. T ist stetig, selbstadjungiert, kompakt und 0 ist kein Eigenwert von T.
2. λ ist genau dann Eigenwert der STRUMschen Randwertaufgabe, wenn $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von T ist.

Satz 15 Es existieren Folgen (λ_n) in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und (u_n) in $C([a,b],\mathbb{R})$ mit

1. $|\lambda_n| \le |\lambda_{n+1}|$ $(n \in \mathbb{N})$ und $|\lambda_n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.
2. $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ sind alle Eigenwerte der STURMschen Eigenwertaufgabe und u_n ist eine Eigenfunktion zu λ_n.

3. $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist ein maximales Orthonormalsystem.

4. Es gilt

$$Tu = \sum_{n=1}^{\infty} (Tu, u_n) u_n \qquad (u \in C([a,b], \mathbb{R})).$$

Bem.

1. Ersetzt man $C([a,b], \mathbb{R})$ durch den HILBERT-Raum $L^2([a,b], \mathbb{R})$, so gilt Satz 15 analog und $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist dann eine Orthonormalbasis.

2. Analoge Überlegungen sind möglich für die Eigenwertaufgabe

$$(Lu)(x) = \lambda r(x) u(x) \qquad R_a u = R_b u = 0$$

für gegebenes $r \in C([a,b], \mathbb{R})$, $r > 0$. In diesem Fall verwendet man

$$(u, v) := \int_a^b r(t) u(t) v(t) dt$$

als Skalarprodukt.

Bsp. Betrachte $Lu = u'', R_0 u = u(0), R_\pi u = u(\pi)$, also das Randwertproblem

$$u''(x) = \lambda u(x), \qquad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Für $\lambda \geq 0$ existieren keine Eigenwerte. Sei $\lambda < 0$. Dann ist

$$\left\{ \cos(\sqrt{-\lambda} x), \sin(\sqrt{-\lambda} x) \right\}$$

ein Fundamentalsystem. Hier ist $\lambda_n = -n^2$ und als Eigenfunktionen $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ erhält man z.B. die Funktionenfolge

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Satz 16 Die Konvergenz der Reihe

$$Tu = \sum_{n=1}^{\infty} (Tu, u_n) u_n$$

aus Satz 15.4 ist gleichmäßig.

Bsp. Betrachte $Lu = u'', R_0 u = u(0), R_\pi u = u(\pi)$. Hier ist $(\lambda_n) = -n^2$ und (u_n) z.B. gegeben durch

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx),$$

denn

$$\int_0^\pi \sin^2(nx) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Sei T der zum Randwertproblem

$$Lw = w'', \qquad R_0 w = w(0), R_\pi w = w(\pi)$$

gehörende Operator. Die Funktion

$$w : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \qquad w(x) = x(x-\pi)$$

liegt in Bild T und hat das Urbild $u = 2$, denn $(T2)(x) = x(x-\pi)$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
(T2, u_n) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi x(x-\pi)\sin(nx)dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3} \qquad (n \in \mathbb{N}) \\
\Longrightarrow \quad x(x-\pi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2((-1)^n-1)}{n^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^3} \sin(nx) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n+1)^3} \sin((2n+1)x).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt mit dem speziellen $x = \frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi^2}{4} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)^3} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

7 Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen. Weiter sei $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad y(x_0) = y_0 \tag{$*$}$$

für ein vorgegebenes $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Satz 17 (Satz von PEANO) Das Anfangswertproblem $(*)$ ist lokal lösbar und jede Lösung läßt sich zu einer nicht fortsetzbaren Lösung $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^n$ fortsetzen.

Bem. Ist $(*)$ eindeutig lösbar, so ist $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^n$ eindeutig bestimmt und heißt *die* Lösung von $(*)$. Um die Abhängigkeit von (x_0, y_0) zu untersuchen, schreibt man $y(x, x_0, y_0), \omega_-(x_0, y_0)$ und $\omega_+(x_0, y_0)$ für diejenigen $(x_0, y_0) \in \Omega$, für die $(*)$ eindeutig lösbar ist. Im Fall, daß $(*)$ für alle $(x_0, y_0) \in \Omega$ eindeutig lösbar ist, erhält man eine Funktion $y : E_\Omega \to \mathbb{R}^n$ mit

$$E_\Omega = \{(x, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \Omega : \omega_-(x_0, y_0) < x < \omega_+(x_0, y_0)\}$$

Satz 18 Es sei (f_k) eine Folge in $C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $((\xi_k, \eta_k))$ eine Folge in Ω. Die Folge (f_k) konvergiere gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gegen $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $((\xi_k, \eta_k))$ konvergiere für $k \to \infty$ gegen $(x_0, y_0) \in \Omega$. Es sei jeweils $y_k : (\omega_{k_-}, \omega_{k_+}) \to \mathbb{R}^n$ eine nicht fortsetzbare Lösung von

$$y'(x) = f_k(x, y(x)), \qquad y(\xi_k) = \eta_k. \tag{A}$$

Dann gibt es eine nicht fortsetzbare Lösung $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^n$ von

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{N}$$

mit folgender Eigenschaft: Eine Teilfolge (y_{k_j}) von (y_k) konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von (ω_-, ω_+) gegen y. Insbesondere gilt

$$\limsup_{j \to \infty} \omega_{k_j -} \leq \omega_- \leq \omega_+ \leq \liminf_{j \to \infty} \omega_{k_j +}.$$

Bem. Ist im obigen Satz das Anfangswertproblem (A) eindeutig lösbar, so konvergiert bereits (y_k) selbst gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von (ω_-, ω_+) gegen die Lösung $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^n$ von (N). Falls (A) für jedes $(x_0, y_0) \in \Omega$ eindeutig lösbar ist, erhält man insbesondere durch Betrachtung von $f_k = f$ $(k \in \mathbb{N})$ die folgenden Aussagen:

- $E_\Omega = \{(x, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \Omega : \omega_-(x_0, y_0) < x < \omega_+(x_0, y_0)\}$
- $y : E_\Omega \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.

Bsp. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Für ein $(x_0, y_0, \lambda) \in \Omega$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x), \lambda) \qquad y(x_0) = y_0. \tag{A_λ}$$

Falls alle Anfangswertprobleme (A_λ) eindeutig lösbar sind, erhält man die stetig Abhängigkeit der Lösung $y(x) = y(x, x_0, y_0, \lambda)$. Dazu erweitert man die abhängigen Variablen um λ, betrachtet also das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x), \lambda(x)) & y(x_0) &= y_0 \\ \lambda'(x) &= 0 & \lambda(x_0) &= \lambda_0 \end{aligned}$$

als Anfangswertproblem im $\mathbb{R}^{n+m}$. Die Lösung y_λ hängt stetig von (x, x_0, y_0, λ_0) ab und damit hängt y stetig von (x, x_0, y_0, λ_0) ab.

Satz 19 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, f stetig auf Ω und $f = f(x, y)$ stetig differenzierbar nach y. Weiter sei

$$w : E_\Omega \to \mathbb{R}^n, \qquad w = w(x, x_0, y_0)$$

die Lösung von

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Dann gilt: w ist stetig differenzierbar nach y_0 und

$$w_{y_0}(\cdot, x_0, y_0) : (\omega_-(x_0, y_0), \omega_+(x_0, y_0)) \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

ist die Lösung der zu (A) gehörenden *Variationsgleichung*

$$u'(x) = f_y(x, w(x, x_0, y_0)) \cdot u(x), \qquad u(x_0) = I_{n\times n}. \tag{V}$$

Ist $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so ist $w \in C^1(E_\Omega, \mathbb{R}^n)$ und zusätzlich gilt

$$w_{x_0}(x, x_0, y_0) = -w_{y_0}(x, x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0).$$

Bsp. Betrachte $\Omega = \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 1 + y^2$, also

$$y'(x) = 1 + (y(x))^2, \qquad y(x_0) = y_0. \tag{A}$$

Dann gilt:

$$\omega_\pm(x_0, y_0) = \pm\frac{\pi}{2} - \arctan y_0 + x_0$$
$$w(x, x_0, y_0) := y(x) = \tan(x + \arctan y_0 - x_0) \qquad (x \in \omega_-(x_0, y_0), \omega_+(x_0, y_0)).$$

Dies führt auf die Variationsgleichung

$$u'(x) = 2\tan(x + \arctan y_0 - x_0)u(x) \qquad u'(x_0) = 1.$$

Es gilt

$$w_{y_0}(x, x_0, y_0) = u(x) = (1 + \tan^2(x + \arctan y_0 - x_0)) \cdot \frac{1}{1 + y_0^2}$$
$$= \frac{1}{(1 + y_0^2) \cdot \cos^2(x + \arctan y_0 - x_0)}.$$

Satz 20 (Differentialungleichungen) Wir betrachten eine Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und differenzierbare Funktionen $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1. Aus $u(a) \le v(a)$ und
$$u'(x) - f(x, u(x)) < v'(x) - f(x, v(x)) \qquad (x \in (a, b])$$
folgt $u(x) < v(x)$ $(x \in (a, b])$.

2. Ist f auf $[a, b] \times \mathbb{R}$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich y, so gilt: Aus $u(a) \le v(a)$ $[u(a) < v(a)]$ und
$$u'(x) - f(x, u(x)) \le v'(x) - f(x, v(x)) \qquad (x \in [a, b])$$
folgt $u(x) \le v(x)$ $[u(x) < v(x)]$ $(x \in [a, b])$.

8 Die Prüfertransformation

Def. 9 Es sei $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine nichttriviale Lösung von $(Lu)(x) = 0$. Dann heißen die Funktionen $\varphi, \varrho : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := \arctan\frac{u(x)}{p(x)u'(x)}, \qquad \varrho(x) := \sqrt{(p(x)u'(x))^2 + (u(x))^2}$$

die *Prüfertransformation* von $(Lu)(x) = 0$.

Bem.

- (φ, ϱ) ist die Polarkoordinatendarstellung des Weges

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(t) := (p(t)u'(t), u(t)).$$

  φ ist wohldefiniert, weil γ nach Voraussetzung nicht identisch 0 ist und wegen der eindeutigen Lösbarkeit von Anfangswertproblemen zu $(Lu)(x) = 0$ damit überhaupt nicht durch den Nullpunkt geht.

- $\varphi(a) \in [0, 2\pi)$ wird geeignet gewählt und jeweils beim Übergang über die u-Achse, wenn also x gegen eine Nullstelle von u' geht, wird durch Addition oder Subtraktion von π der Zweig des arctan gewechselt.

Satz 21 Sei (φ, ϱ) die Prüfertransformartion von $(Lu)(x) = 0$. Dann gilt

$$\varphi'(x) = \frac{1}{p(x)} \cos^2 \varphi(x) + q(x) \sin^2 \varphi(x)$$
$$\varrho'(x) = \left(\frac{1}{p(x)} - q(x) \right) \varrho(x) \sin \varphi(x) \cos \varphi(x).$$

Bem.

- Diese Differentialgleichungen erfüllen die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf, so daß man ohne Kenntnis von Differenzierbarkeitseigenschaften von p und q auf die Existenz von Lösungen schließen kann.

- Die Prüfertransformation ist besonders nützlich zur Untersuchung der Nullstellen von u, da gilt

$$u(x_0) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi(x_0) = 0 \bmod \pi.$$

- Da mit φ auch $\varphi - \pi$ den obigen Differentialgleichungen genügt, kann man stets $\varphi(a) \in [0, \pi)$ annehmen.

9 Die Sätze von Sturm

Bem. Eine nichttriviale Lösung $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ hat höchstens endlich viele Nullstellen.

Satz 22 Es sei u eine nichttriviale Lösung von $(Lu)(x) = 0$ mit genau n Nullstellen $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ in $(a,b]$. φ mit $\varphi(a) \in [0, \pi)$ sei die zu u gehörige Funktion aus der Prüfertransformation. Dann gilt

$$\varphi(x_k) = k\pi, \qquad \varphi(x) > k\pi \quad (x \in (x_k, b]).$$

Def. 10 Auf $[a,b]$ seien zwei Differentialoperatoren

$$L_1 u = (p_1 u')' + q_1 u, \qquad L_2 u = (p_2 u')' + q_2 u$$

gegeben. Gilt $p_1(x) \geq p_2(x) > 0, q_1(x) \leq q_2(x)$ $(x \in [a,b])$, so heißt L_2 *majorant* zu L_1.

Satz 23 (1. STURMscher Vergleichssatz) Es gelte $(L_1u_1)(x) = 0$ auf $[a,b]$ und u_1 habe auf $(a,b]$ genau die n Nullstellen $x_1 < \cdots < x_n$. $u_2 \neq 0$ sei eine Lösung von $(L_2u_2)(x) = 0$ auf $[a,b]$ mit

$$\frac{p_1(a)u_1'(a)}{u_1(a)} \geq \frac{p_2(a)u_2'(a)}{u_2(a)}$$

($\frac{1}{0} := \infty$) und L_2 majorisiere L_1. Dann besitzt u_2 mindestens n Nullstellen auf $(a, x_n]$. Gilt in der obigen Gleichung sogar $>$ statt $\geq$ oder majorisiert L_2 L_1 strikt, so hat u_2 mindestens n Nullstellen in (a, x_n).

Bem. (Trennungssatz von STURM) Es gilt zusätzlich: Zwischen je zwei Nullstellen von u_1 liegt eine Nullstelle von u_2. Im Fall $L_1 = L_2$ liegt zwischen je zwei Nullstellen von u_1 genau eine Nullstelle von u_2 (und umgekehrt).

Satz 24 (2. STURMscher Vergleichssatz) Es gelte $(L_1u_1)(x) = 0$ auf $[a,b]$ und u_1 habe auf $(a,b]$ genau die n Nullstellen $x_1 < \cdots < x_n$. $u_2 \neq 0$ sei eine Lösung von $(L_2u_2)(x) = 0$ auf $[a,b]$ mit

$$\frac{p_1(a)u_1'(a)}{u_1(a)} \geq \frac{p_2(a)u_2'(a)}{u_2(a)}$$

($\frac{1}{0} := \infty$) und L_2 majorisiere L_1. Weiter habe u_2 in $(a,b]$ genau n Nullstellen. Dann gilt:

$$\frac{p_1(b)u_1'(b)}{u_1(b)} \geq \frac{p_2(b)u_2'(b)}{u_2(b)}$$

($\frac{1}{0} := -\infty$).

Bsp.

- Es sei $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $0 < m \leq q(x) \leq M$ auf $[a,b]$. Dann gilt: Sind x_1, x_2 zwei aufeinanderfolgende Nullstellen der Lösung u von

  $$u''(x) + q(x)u(x) = 0,$$

  so gilt

  $$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq x_2 - x_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

  Bew.: Wir betrachten die Differentialoperatoren $L_1u = u'' + mu$ und $Lu = u'' + qu$ und $L_2u = u'' + Mu$. L_2 majorisiert L und L majorisiert L_1. Für

  $$u_1(x) := \sin(\sqrt{m}(x - x_1)), \qquad u_2(x) := \sin(\sqrt{M}(x - x_1))$$

  gilt $(L_1u_1)(x) = 0$ und $(L_2u_2)(x) = 0$ sowie

  $$\frac{u_1'(x_1)}{u_1(x_1)} = \frac{u'(x_1)}{u(x_1)} = \frac{u_2'(x_1)}{u_2(x_1)} = \infty.$$

Nach dem ersten STURMschen Vergleichssatz besitzt u_2 eine erste Nullstelle $\overline{x}_2$ in $(x_1, x_2]$, woraus

$$\pi = \sqrt{M} \cdot (\overline{x}_2 - x_1) \leq \sqrt{M} \cdot (x_2 - x_1),$$

also $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq x_2 - x_1$ folgt. Da L L_1 majorisiert, besitzt u eine Nullstelle in $(x_1, x_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}]$ und aus $x_2 \in (x_1, x_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}})$ folgt $x_2 - x_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Aus beidem folgt die Behauptung. ∎

- Für eine Funktion q mit $0 < m \leq q(x) \leq M$ betrachten wir das Randwertproblem

$$u''(x) + q(x)u(x) = 0, \qquad u(a) = u(b) = 0.$$

Existiert eine Lösung $u \neq 0$, so gilt nach dem obigen Beispiel $b - a \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}}$. Umgekehrt kann man aus $b - a < \frac{\pi}{\sqrt{M}}$ also schließen, daß das Randwertproblem nur trivial lösbar ist.

10 Nochmals die STURMsche Eigenwertaufgabe

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Differentialoperator $Lu = (pu')' + qu$ und das Randwertproblem

$$\left.\begin{array}{rcl} (Lu)(x) + \lambda u(x) & = & 0 \\ R_a u = u(a)\cos\alpha - p(a)u'(a)\sin\alpha & = & 0 \\ R_b u = u(b)\cos\beta - p(b)u'(b)\sin\beta & = & 0 \end{array}\right\} \quad (P_\lambda)$$

Die leicht geänderte Form der Randbedingungen hat den Vorteil, daß man bei Anwendung der Prüfertransformation $\alpha = \varphi(a) \in [0, \pi)$ und $\beta = \varphi(b) \in (0, \pi]$ betrachten kann.

Satz 25 Es gibt eine unbeschränkte, streng monoton wachsende Folge (λ_n) in $\mathbb{R}$, so daß das Problem (P_λ) genau dann nichttrivial lösbar ist, wenn $\lambda = \lambda_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Bem.

- Zusätzlich gilt

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n^2} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n^2} < \infty$$

- λ_n der n-te Eigenwert und u_n die zu λ_n gehörige Eigenfunktion, so besitzt u_n genau $n - 1$ Nullstellen in (a, b).

- Da der Lösungsraum eines linearen Randwertproblems eindimensional ist, ist mit u_n jede weitere Eigenfunktion von der Form cu_n $(c \neq 0)$.

11 Nichtlineare Randwertprobleme

$Lu = (pu')' + qu$ sei ein Differentialoperator und R_a, R_b seien Randoperatoren. Weiter sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gesucht sind Lösungen des Randwertproblems

$$(Lu)(x) = f(x, u(x), u'(x)), \qquad R_a u = \eta_a, R_b u = \eta_b. \tag{$*$}$$

Wir nehmen an, daß das zu $(*)$ gehörige homogene Problem nur trivial lösbar ist und daß zu $(*)$ eine GREENsche Funktion existiert.

Bem. Zur Vereinfachung beschränken wir uns im Folgenden auf den Fall $\Omega = \mathbb{R}^2$,

$$Lu = u'', \qquad R_a u = u(a), R_b u = u(b).$$

Der allgemeine Fall geht analog, wenn man genügend Informationen über die GREENsche Funktion zur Verfügung hat. Wir nehmen oBdA weiter an, daß $[a,b] = [0,1]$ ist. Die GREENsche Funktion lautet dann

$$G : [0,1]^2 \to \mathbb{R}, \qquad G(x,t) = \begin{cases} -(1-x)t & 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ -x(1-t) & 0 \leq x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Wir betrachten den Fall $\eta_a = \eta_b = 0$. Für den allgemeinen Fall betrachtet man

$$u(x) = y(x) + \frac{x-a}{b-a}(\eta_b - \eta_a) + \eta_a$$

und für y das Randwertproblem

$$y''(x) = F(x, y(x), y'(x)), \qquad R_a y = 0, R_b y = 0$$

mit

$$F(x,y,p) := f(x, y + \frac{x-a}{b-a}(\eta_b - \eta_a) + \eta_a, p + \frac{\eta_b - \eta_a}{b-a}).$$

Dann löst u das Randwertproblem

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \qquad R_a u = \eta_a, R_b u = \eta_b.$$

Insgesamt betrachten wir also das Randwertproblem

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0 \tag{N}$$

Bsp. Sei $g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to (0, \infty)$ stetig. Betrachte das Randwertproblem

$$u''(x) = -\pi^2 u(x) + g(x, u(x), u'(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Dieses Randwertproblem ist unlösbar.
Bew.: Angenommen, $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & u''(x) + \pi^2 u(x) = g(x, u(x), u'(x)) \\ \Longrightarrow \quad & \sin(\pi x) u''(x) + \sin(\pi x)\pi^2 u(x) = \sin(\pi x) g(x, u(x), u'(x)) \\ \Longrightarrow \quad & \int_0^1 \sin(\pi x) u''(x) dx + \int_0^1 \sin(\pi x)\pi^2 u(x) dx = \underbrace{\int_0^1 \sin(\pi x) g(x, u(x), u'(x)) dx}_{>0}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin(\pi x)u''(x)dx &= \underbrace{\Big[u'(x)\cdot\sin(\pi x)\Big]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \pi\cos(\pi x)u'(x)dx \\ &= -\left(\underbrace{\Big[\pi\cos(\pi x)u(x)\Big]_0^1}_{=0} + \pi^2\int_0^1 u(x)\sin(\pi x)dx\right) \\ &= -\int_0^1 \sin(\pi x)\pi^2 u(x)dx,\end{aligned}$$

also

$$\int_0^1 \sin(\pi x)u''(x)dx + \int_0^1 \sin(\pi x)\pi^2 u(x)dx = 0.$$

Widerspruch! ∎

Bem. Wir wollen das Problem (N) mit Hilfe der GREENschen Funktion als Fixpunktproblem darstellen. Dazu betrachten wir den Raum $E := C^1([0,1],\mathbb{R})$ mit der Norm

$$||u|| := ||u||_\infty + ||u'||_\infty = \max_{x\in[0,1]}|u(x)| + \max_{x\in[0,1]}|u'(x)|.$$

$(E, ||\cdot||)$ ist dann ein BANACH-Raum. Der Operator T sei definiert durch

$$T : E \to E, \qquad (Tu)(x) := \int_0^1 G(x,t)f(t,u(t),u'(t))dt.$$

T ist stetig und $u \in E$ löst (N) genau dann wenn $Tu = u$ gilt.

Def. 11 Sei E ein BANACH-Raum, $C \subseteq E$ abgeschlossen und $T : C \to E$ stetig. T heißt *kompakt*, falls gilt: Für jede Folge (x_n) in C besitzt (Tx_n) eine konvergente Teilfolge.

Bem.

- Die obige Definition stimmt im Fall $C = E$ und T linear *nicht* mit der Definition eines kompakten linearen Operators überein. Dort wird nämlich (x_n) als beschränkt vorausgesetzt.
- Ist T kompakt, so ist $T(C)$ beschränkt.

Satz 26 (Fixpunktsatz von SCHAUDER) Sei E ein BANACH-Raum, $\emptyset \neq C \subseteq E$ abgeschlossen und konvex. $T : C \to C$ sei kompakt. Dann hat T einen Fixpunkt.

Satz 27 (Satz von SCORZA-DRAGONI). Es sei $f : [0,1]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann hat das Randwertproblem (N) eine Lösung.

Bsp. Für $a, b, c \in C([0,1], \mathbb{R})$ besitzt das Randwertproblem

$$u''(x) = c(x)\sin(a(x)u(x) + b(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

eine Lösung.

Def. 12 $v \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ heißt *Oberfunktion* zum Randwertproblem (N), falls gilt

$$v''(x) \geq f(x, v(x), v'(x)), \qquad v(0) \leq 0, v(1) \leq 0.$$

$w \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ heißt *Unterfunktion* zum Randwertproblem (N), falls gilt

$$w''(x) \leq f(x, w(x), w'(x)), \qquad w(0) \geq 0, w(1) \geq 0.$$

Sei v eine Unterfunktion und w eine Oberfunktion zu (N) mit $v \leq w$. f genügt relativ zu v und w einer NAGUMO-*Bedingung*, wenn es eine stetige Funktion $\varphi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ gibt mit

$$|f(x,u,p)| \leq \varphi(|p|) \qquad (x \in [0,1], u \in [v(x), w(x)], p \in \mathbb{R})$$

und

$$\int_0^\infty \frac{s}{\varphi(s)} ds = \infty.$$

Satz 28 Seien $v, w \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ mit $v \leq w$ und $\varphi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ stetig mit

$$\int_0^\infty \frac{s}{\varphi(s)} ds = \infty.$$

Dann existiert eine nur von v, w und φ abhängige Konstante $M > 0$ mit: Für alle Funktionen $u \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ mit

$$|u''(x)| \leq \varphi(|u'(x)|) \qquad (x \in [0,1])$$

und $v(x) \leq u(x) \leq w(x)$ $(x \in [0,1])$ gilt

$$|u'(x)| \leq M \qquad (x \in [0,1]).$$

Bem. Es genügt die schwächere Voraussetzung

$$\int_0^\infty \frac{s}{\varphi(s)} ds > \max_{x \in [0,1]} w(x) - \max_{x \in [0,1]} v(x).$$

Satz 29 (Satz von NAGUMO) Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, v sei eine Unterfunktion und w eine Oberfunktion zu (N) mit $v \leq w$. Weiter genüge f relativ zu v und w einer NAGUMO-Bedingung. Dann hat (N) eine Lösung.

Bsp. Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Es gebe ein $c \in [0, \pi)$ mit

$$u \cdot (f(x,u) - f(x,0)) \geq -c^2 u^2 \qquad (x \in [0,1], u \in \mathbb{R}).$$

Dann besitzt (N) eine Lösung.

Satz 30 Es sei $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und für Konstanten $L, M \geq 0$ mit $\frac{L}{8} + \frac{M}{2} < 1$ gelte

$$|f(x,u,p) - f(x,\tilde{u},\tilde{p})| \leq L|u-\tilde{u}| + M|p-\tilde{p}|$$

für $(x,u,p), (x,\tilde{u},\tilde{p}) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$. Dann ist (N) eindeutig lösbar.

Bem. Für $[a,b]$ statt $[0,1]$ transformiert sich die obige Bedingung zu

$$\frac{L}{8}(b-a)^2 + \frac{M}{2}(b-a) < 1.$$

Bsp. Betrachte das Randwertproblem (N) mit

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,u,p) = cx^2 \cos u \cos p$$

für $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} & |f(x,u,p) - f(x,\tilde{u},\tilde{p})| = x^2|c| \cdot |\cos u \cos p - \cos \tilde{u} \cos \tilde{p}| \\ = \; & x^2|c| \cdot |\cos u \cos p - \cos u \cos \tilde{p} + \cos u \cos \tilde{p} - \cos \tilde{u} \cos \tilde{p}| \\ \leq \; & |c| \cdot (|\cos u \cdot (\cos p - \cos \tilde{p})| + |\cos \tilde{p}(\cos u - \cos \tilde{u})|) \\ \leq \; & |c| \cdot |p - \tilde{p}| + |c| \cdot |u - \tilde{u}|. \end{aligned}$$

Damit können wir $M = L = |c|$ wählen und nach dem obigen Satz ist das Randwertproblem eindeutig lösbar, falls gilt $|c| < \frac{8}{5}$.

12 Die Schießfunktion

Def. 13 Es sei $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und LIPSCHITZ-stetig in der zweiten und dritten Variablen. Zu $s \in \mathbb{R}$ sei y_s die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \qquad y(0) = 0, y'(0) = s.$$

Dann heißt

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(s) := y_s(1)$$

Schießfunktion zur Differentialgleichung des obigen Anfangswertproblems.

Bem.

- h ist stetig.
- Die Funktion $u(x) := y_s(x)$ ist offensichtlich genau dann Lösung des Randwertproblems

  $$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

  wenn $h(s) = 0$ ist.

Satz 31 (Satz von HERZOG-LEMMERT) Es sei $C \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine stetige Funktion $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, LIPSCHITZ-stetig in der zweiten Variablen mit LIPSCHITZ-Konstante $L \leq \pi^2 + \varepsilon$, so daß C die Nullstellenmenge der zum Randwertproblem

$$u''(x) = f(x, u(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

gehörigen Schießfunktion ist.

Bem.

- Insbesondere gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Randwertproblem mit genau n Lösungen, indem man z.B. die abgeschlossene Menge $C = \{1, 2, \ldots, 128\}$ betrachtet.
- Ist $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ LIPSCHITZ-stetig in der zweiten Veränderlichen zu einer Konstanten $L < \pi^2$, so ist das Randwertproblem

  $$u''(x) = f(x, u(x)), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

  eindeutig lösbar.

Satz 32 Seien $a, b \in C([0,1], \mathbb{R})$ derart, daß das lineare Randwertproblem

$$w''(x) = a(x)w(x) + b(x)w'(x), \qquad w(0) = w(1) = 0$$

nur trivial lösbar ist. Dann gilt:

1. Das Randwertproblem

   $$w''(x) = a(x)w(x) + b(x)w'(x) + h(x), \qquad w(0) = w(1) = 0$$

   ist für jedes $h \in C([0,1], \mathbb{R})$ eindeutig lösbar und es existiert eine von h unabhängige Konstate α mit

   $$\max\{||w||_\infty, ||w'||_\infty\} \leq \alpha ||h||_\infty.$$

2. Das Randwertproblem

   $$w''(x) = a(x)w(x) + b(x)w'(x), \qquad w(0) = \eta_0, w(1) = \eta_1$$

   ist für jede Wahl von $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar und die Lösung hängt stetig von η_0 und η_1 ab.

Satz 33 (Satz von PEROW) Sei $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ lokal LIPSCHITZ-stetig in (y,p). Weiter seien $a, b \in C([0,1], \mathbb{R})$ und es gelte

1. $\lim\limits_{|y|+|p| \to \infty} \dfrac{||f(\cdot, y, p) - ay - bp||_\infty}{|y| + |p|} = 0$
2. Das Randwertproblem

   $$w''(x) = a(x)w(x) + b(x)w'(x) \qquad w(0) = w(1) = 0$$

   ist nur trivial lösbar.

Dann gilt: Das Randwertproblem

$$u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \qquad u(0) = \eta_0, u(1) = \eta_1$$

ist für alle $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$ lösbar.

Bem.

- Dieser Satz gilt auch, wenn f nur stetig ist. In diesem Fall ist er eine Verallgemeinerung des Satzes von SCORZA-DRAGONI.
- Erfüllt f die Voraussetzungen des obigen Satzes und ist $g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, lokal LIPSCHITZ-stetig in (y,p) und beschränkt, so erfüllt auch $f+g$ die Voraussetzungen.

Bsp. Das Randwertproblem

$$u''(x) = \sqrt[4]{1+u^2(x)} + u'(x) + x \cdot \sin(u(x)u'(x)) \qquad u(0) = u(1) = 0$$

hat eine Lösung.
Bew.: Sei $b = 1, a = 0$. Dann gilt:

$$\frac{|\sqrt[4]{1+y^2} + p + x \cdot \sin(yp) - p|}{|y| + |p|} \leq \frac{1}{\sqrt{|y|+|p|}} \sqrt[4]{\frac{1+y^2}{(|y|+|p|)^2}} + \frac{1}{|y|+|p|}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{|y|+|p|}} \sqrt[4]{\frac{1}{(|y|+|p|)^2} + 1} + \frac{1}{|y|+|p|} \xrightarrow{|y|+|p| \to \infty} 0.$$

Außerdem hat das Randwertproblem

$$w''(x) = w'(x), \qquad w(0) = w(1) = 0$$

nur die triviale Lösung. Damit folgt die Behauptung aus Satz 33. ∎

Satz 34 Sei $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und stetig partiell differenzierbar nach der zweiten Variablen. $\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$ seien zwei aufeinanderfolgende Eigenwerte der STURMschen Eigenwertaufgabe

$$(Lu)(x) + \lambda u(x) = 0 \qquad R_a u = R_b u = 0.$$

Weiter gebe es $\mu_k, \mu_{k+1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_k < \mu_k \leq f_u(x,u) \leq \mu_{k+1} < \lambda_{k+1} \qquad ((x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R})$$

oder $L, \mu_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$-L \leq f_u(x,u) \leq \mu_1 < \lambda_1 \qquad ((x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}).$$

Dann gilt: Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} (Lu)(x) + f(x,u(x)) &= 0 \\ R_a u = u(a)\cos\alpha - p(a)u'(a)\sin\alpha &= 0 \\ R_b u = u(b)\cos\beta - p(b)u'(b)\sin\beta &= 0 \end{aligned}$$

ist eindeutig lösbar und die zugehörige Schießfunktion ist streng monoton mit Mindest- bzw. Höchststeigung.

13 Monotoniemethoden bei Integralgleichungen

Def. 14 Sei Ω durch eine reflexive, antisymmetrische, transitive Relation $\leq$ geordnet. $z \in \Omega$ heißt *Supremum* [*Infimum*] von $M \subseteq \Omega$, falls gilt:

$$x \leq [\geq] z \ (x \in M) \qquad \text{und} \qquad x \leq [\geq] \tilde{z} \ (m \in M) \quad \Longrightarrow \quad z \leq [\geq] \tilde{z}.$$

1. Ω heißt *Verband*, wenn zu $x, y \in \Omega$ stets $\inf\{x, y\}$ und $\sup\{x, y\}$ in Ω existieren.

2. Ω heißt *vollständiger* Verband, wenn für jede Menge $\emptyset \neq M \subseteq \Omega$ stets $\sup M$ und $\inf M$ in Ω existieren.

Bsp.

- $\Omega := (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Verband, aber kein vollständiger Verband, denn z.B. $\sup(0, 1) = 1 \notin \Omega$. Dagegen ist $[0, 1]$ ein vollständiger Verband.

- Ist Ω eine Menge von Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$, so werde Ω geordnet durch

  $$u \leq v \qquad :\Longleftrightarrow \qquad u(x) \leq v(x) \ (x \in [a, b]).$$

  Betrachten wir die Menge $\Omega := \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ mit

  $$\begin{aligned} f_1 &: [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad f_1(x) := \frac{1}{2} \\ f_2 &: [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad f_2(x) := x \\ f_3 &: [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad f_3(x) := 1 \\ f_4 &: [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad f_4(x) := 0. \end{aligned}$$

  Wegen $f_2 \leq f_3$ und $f_1 \leq f_3$ gilt z.B. $\sup\{f_1, f_2\} = f_3$. Ω ist ein Verband.

- $\Omega := \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : ||f||_\infty \leq 1\}$ ist ein Verband: Seien $u, v \in \Omega$. Dann gilt $w = \sup\{u, v\}$ für

  $$w : [0, 1] \to [-1, 1], \qquad w(x) := \max\{u(x), v(x)\}.$$

  Ω ist jedoch kein vollständiger Verband.

Satz 35 (Fixpunktsatz von Tarski) Sei $\Omega \neq \emptyset$ ein vollständiger Verband und $\Phi : \Omega \to \Omega$ monoton wachsend. Dann hat Φ einen Fixpunkt.

Satz 36 Seien $L \geq 0$, $c, C \in \mathbb{R}$ mit $c \leq C$. Weiter sei Ω die Menge aller Lipschitz-stetigen Funktionen $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $c \leq u(x) \leq C \ (x \in [0, 1])$. Ω sei geordnet durch

$$u \leq v \qquad :\Longleftrightarrow \qquad u(x) \leq v(x) \ (x \in [0, 1]).$$

Dann ist Ω ein vollständiger Verband.

Bem. Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und durch $\beta > 0$ beschränkt. Ω sei die Menge aller LIPSCHITZ-stetigen Funktionen $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, die durch $\frac{\beta}{8}$ beschränkt sind. Dann bildet der Operator

$$T : \Omega \to \Omega, \qquad (Tu)(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t, u(t)) dt$$

Ω in sich ab. Ist f in y monoton fallend, so ist T wachsend und da Ω ein vollständiger Verband ist, hat T einen Fixpunkt, d.h. das Randwertproblem

$$u''(x) = f(x, u(x)) \qquad u(0) = u(1) = 0$$

hat eine Lösung. Dies sagt zwar bereits der Satz von SCORZA-DRAGONI, wurde jedoch hier ohne Verwendung des Fixpunktsatzes von SCHAUDER gezeigt.

Satz 37 Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt durch $\beta \in \mathbb{R}$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(0) = y_0$$

eine Lösung auf $[0,1]$.

Index

D

Differentialoperator 11
    majorant 20
Differentialungleichung 19

E

Eigenschwingung 2
Eigenwert 2, 10
Eigenwertaufgabe
    Sturmsche 15–17, 22
Elastizitätsmodul 1

F

Fourier-Koeffizienten 7
Funktion
    Greensche 14–15

G

Greensche Funktion 14–15

H

hermitesch 9
Herzog-Lemmert, Satz von 27
Hilbert-Raum 5
    Isomorphie 9

I

Infimum 29
Innenprodukt 5
Innenproduktraum 5
Isomorphismus 9

K

Kompaktheit
    eines Operators 9

M

Membran 4

N

Nagumo, Satz von 25
Nagumo-Bedingung 25
Norm 5

O

Oberfunktion 25
Operator 9
    Eigenwert 10
    hermitesch 9
    kompakter 9–11
    Kompaktheit 24
    Norm 9
    Rand- 11
    selbstadjungierter 9–11
    Spektrum 9
    stetiger 9–11
Operatornorm 9
Orthogonalsystem 7
Orthonormalbasis 7
Orthonormalsystem 7
    maximales 7

P

Peano, Satz von 17
Perow, Satz von 27
Prä-Hilbert-Raum 5
Prüfertransformation 19–20

R

Randoperator 11
Randwertaufgabe
    Sturmsche 11–13
Randwertproblem
    Eigenfunktion 2
    Eigenwert 2
    homogenes 11
    Lösung 11
    nichtlineares 23–26

S

Saite 1
Schauder, Fixpunktsatz von 24
Schießfunktion 26–28
Scorza-Dragoni, Satz von 24
senkrecht 6
Separationsansatz 2
Skalarprodukt 5
Spektrum 9
Sturm, Sätze von 20–22
Sturm, Trennungssatz von 21
Sturm, Vergleichssatz von 21
Supremum 29

T

Trennungssatz 21

U

Unterfunktion 25
Unterraum 5
    Abgeschlossenheit 5

V

Variationsgleichung 19
Verband 29
    vollständiger 29
Vergleichssatz 21

W

Wronski-Determinante 13