Funktionentheorie I

Manuel Kauers
nach einer Vorlesung von
Dr. S. Kühnlein

21. Oktober 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Aufbau des Zahlensystems

Gegeben sei die Menge der *natürlichen Zahlen*:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \quad \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Es gebe zwei Verknüpfungen $+, \cdot : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ (*Addition* und *Multiplikation*).

Axiom 1 Für die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{N}_0$ gelten:

1. $\forall \quad a, b \in \mathbb{N}_0 : \qquad a + b = b + a$ (*Kommutativität*)
2. $\forall \quad a, b \in \mathbb{N}_0 : \qquad a \cdot b = b \cdot a$ (*Kommutativität*)
3. $\forall \quad a, b, c \in \mathbb{N}_0 : \qquad a + (b + c) = (a + b) + c$ (*Assoziativität*)
4. $\forall \quad a, b, c \in \mathbb{N}_0 : \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (*Assoziativität*)
5. $\forall \quad a, b, c \in \mathbb{N}_0 : \qquad a + b = a + c \quad \Longrightarrow \quad b = c$ (*Kürzungsregel*)
6. $\forall \quad a \in \mathbb{N}, b, c \in \mathbb{N}_0 : \qquad a \cdot b = a \cdot c \quad \Longrightarrow \quad b = c$ (*Kürzungsregel*)
7. $\forall \quad a, b, c \in \mathbb{N}_0 : \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (*Distributivgesetz*)

Def. 1 Für $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ wird durch

$$(a, b) \sim (c, d) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad a + d = c + b$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert. Die Menge

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 /_{\sim}$$

heißt die Menge der *ganzen Zahlen*.

Bem.

- Es gilt

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

  Die so auf $\mathbb{Z}$ definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sind kommutativ, assoziativ, distributiv und es gilt die Kürzungsregel. Weiter gilt

$$[(a, b) + (b, a)]_{\sim} = [(0, 0)]_{\sim}$$

  sowie $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$ via $a \mapsto [(a, 0)]_{\sim}$.

- Für jede ganze Zahl $z := [(a, b)]_{\sim} \in \mathbb{Z}$ existiert ein $c \in \mathbb{N}_0$ mit $z = [(c, 0)]_{\sim}$ oder $z = [(0, c)]_{\sim}$. Wir schreiben daher im Folgenden kürzer $z = c$ im Fall $z = [(c, 0)]_{\sim}$ bzw. $z = -c$ im Fall $z = [(0, c)]_{\sim}$. Damit gilt

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Def. 2 Für $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ wird durch

$$(a, b) \sim (c, d) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad a \cdot d = c \cdot b$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert. Die Menge

$$\mathbb{Q} := {}^{\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})}/_{\sim}$$

heißt die Menge der *rationalen Zahlen.*

Bem.

- Es gilt

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d)\\ (a, b) \cdot (c, d) &= (a \cdot c, b \cdot d).\end{aligned}$$

  Die so auf $\mathbb{Q}$ definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sind kommutativ, assoziativ, distributiv und es gilt die Kürzungsregel. Weiter gilt $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ via $z \mapsto [(z, 1)]_{\sim}$.

- Für $[(a, b)]_{\sim} \in \mathbb{Q}$ schreiben wir kürzer $\frac{a}{b}$ und nennen dieses Objekt *Bruch*.
- $\mathbb{Q}$ ist ein Körper.

Def. 3

1. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ heißt CAUCHY-*Folge* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \quad k \in \mathbb{N} \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \quad m, n \geq n_0 : \qquad |x_n - x_m| \leq \frac{1}{k}.$$

   Eine Folge heißt *Nullfolge*, falls gilt

$$\forall \quad k \in \mathbb{N} \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \quad n \geq n_0 : \qquad |x_n| \leq \frac{1}{k}.$$

2. Es sei $\mathcal{C}$ die Menge aller CAUCHY-Folgen in $\mathbb{Q}$. Auf $\mathcal{C}$ wird eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert, indem man zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ als äquivalent bezeichnet, wenn die Folge $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Die Menge

$$\mathbb{R} := {}^{\mathcal{C}}/_{\sim}$$

   heißt Menge der *reellen Zahlen*.

Bem. Definiert man Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ gliedweise, so wird $\mathbb{R}$ zu einem Körper. Weiter gilt $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ via $z \mapsto [(z, z, z, \ldots)]_{\sim}$.

Def. 4 Es sei i eine formale Lösung der Gleichung

$$x^2 = -1$$

und $\mathbb{C} := \mathbb{R} \oplus \mathrm{i}\mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ heißt die Menge der *komplexen Zahlen* und i heißt *imaginäre Einheit.*

Bem.

- Auf $\mathbb{C}$ werden durch
$$(x+\mathrm{i}y)+(r+\mathrm{i}s) := (x+r)+\mathrm{i}(y+s)$$
und
$$(x+\mathrm{i}y)\cdot(r+\mathrm{i}s) := (xr-ys)+\mathrm{i}(xs+yr)$$
Verknüpfungen definiert, die $\mathbb{C}$ zu einem Körper machen. $\mathbb{R}$ ist dabei ein Unterkörper von $\mathbb{C}$.

- $\mathbb{C}$ ist ein zweidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der Basis $\{1,\mathrm{i}\}$. Statt von $x^2=-1$ hätte man auch von anderen in $\mathbb{R}$ nicht lösbaren Gleichungen ausgehen können, etwa von
$$x^2+x=-1$$
Dies hätte zum gleichen Körper $\mathbb{C}$, jedoch zu einer anderen Basis geführt.

- Wir verwenden im Folgenden oft z oder w für komplexe Zahlen und x,y bzw. u,v für deren Koeffizienten bezüglich der Basis $\{1,\mathrm{i}\}$.

- Auf $\mathbb{C}$ ist keine Ordnung definiert. Aussagen bezüglich Ordnungen von Zahlen beziehen sich implizit stets auf reelle Zahlen. Insbesondere sind Intervalle stets als Teilmenge von $\mathbb{R}$ aufzufassen.

Def. 5 Es sei $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$.

1. $\operatorname{Re} z := x$ heißt der *Realteil* von z.
2. $\operatorname{Im} z := y$ heißt der *Imaginärteil* von z.
3. $\overline{z} := x-\mathrm{i}y$ heißt die zu z *konjugierte* Zahl.

Satz 1 Für $z,w\in\mathbb{C}$ gilt:

1. $\overline{w+z}=\overline{w}+\overline{z}$, $\overline{w\cdot z}=\overline{w}\cdot\overline{z}$.
2. $\overline{\overline{z}}=z$, d.h. die Konjugation ist eine selbstinverse Bijektion auf $\mathbb{C}$.
3. $\operatorname{Re} z=\frac{z+\overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z=\frac{z-\overline{z}}{2}$
4. $z\in\mathbb{R} \iff z=\overline{z}$
5. $z\in\mathrm{i}\mathbb{R} \iff z=-\overline{z}$

Def. 6 Zu $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$ heißt
$$|z| := \sqrt{z\cdot\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2}$$
der *Betrag*. Zu $z\neq 0$ heißt die eindeutig bestimmte Zahl $\varphi\in(-\pi,\pi]$ mit
$$z=|z|\cdot(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$$
das *Argument* von z und man schreibt $\operatorname{Arg} z := \varphi$. Es sei $\operatorname{Arg} 0 := 0$.

Bem.

- Sei $z = x + \mathrm{i}y$. Dann gilt $|x|, |y| \leq |z|$ und
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2(\max\{|x|, |y|\})^2} = \sqrt{2}\max\{|x|, |y|\}.$$

- Es gilt $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$. Mit Hilfe der Additionstheoreme für sin und cos aus der reellen Analysis erhält man für $z = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ und $w = s \cdot (\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ die Beziehung
$$z \cdot w = r \cdot s \cdot (\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \psi)).$$
Für $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ erhält man induktiv
$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)).$$

- Das Polynom $x^n - 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n verschiedene Nullstellen, nämlich
$$\cos\frac{2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{n} \qquad (k = 0, \ldots, n-1).$$

- Auch in $\mathbb{C}$ gilt die *binomische Formel*:
$$\forall \quad z, w \in \mathbb{C}: \qquad (z + w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}.$$

- Während man zur Veranschaulichung der reellen Zahlen die Zahlengerade verwendet, stellt man $\mathbb{C}$ in der Gaussschen *Zahlenebene* dar. Hierzu trägt man in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem auf der horizontalen Achse den Realteil und auf der vertikalen Achse den Imaginärteil auf. Die anschauliche Bedeutung des Betrags einer Zahl ist der Abstand der Zahl zum Ursprung. Ein Maß für den Abstand zweier Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ zueinander ist $|z - w|$. Das Argument von z läßt sich interpretieren als der Winkel, den die Verbindungslinie zwischen Ursprung und z zur positiven reellen Achse bildet.

- Die Eigenschaften von $\mathbb{R}$ seien im Folgenden bekannt. Begriffe, die sich auf $\mathbb{C}$ beziehen und die nicht explizit definiert werden, seien analog zur üblichen Definition in $\mathbb{R}$ definiert.

2 Folgen, Reihen und elementare Funktionen

Def. 7 Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt *konvergent* gegen $z \in \mathbb{C}$, falls gilt:
$$\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \quad n \geq n_0: \qquad |z - z_n| < \varepsilon.$$
Ist (z_n) konvergent gegen z, so schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ oder $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$. Ist (z_n) konvergent gegen 0, so heißt (z_n) *Nullfolge*. (z_n) heißt Cauchy-*Folge*, falls gilt:
$$\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \quad m, n \geq n_0: \qquad |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Bem.

- Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine CAUCHY-Folge ist.
- Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ ist genau dann CAUCHY-Folge, wenn die Folgen $(\mathrm{Re}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CAUCHY-Folgen in $\mathbb{R}$ sind.
- Konvergieren zwei Folgen (z_n) und (w_n) gegen z bzw. w, so konvergieren auch die Folgen $(z_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n - w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n \cdot w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nämlich gegen $z + w$, $z - w$ bzw. $z \cdot w$. Gilt zusätzlich $w \neq 0$ und $w_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, so konvergiert auch $(\frac{z_n}{w_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{z}{w}$.

Def. 8 Es sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir betrachten die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_k := \sum_{n=0}^{k} z_n$$

Ist (s_k) konvergent gegen s, so heißt s der *Reihenwert* der (*unendlichen*) *Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ und diese Reihe heißt *konvergent*. Ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent, so heißt die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ *absolut konvergent*.

Satz 2 Ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.

Bem. Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent, so ist der Reihenwert unabhängig von der Summationsreihenfolge und man kann für diese Reihe auch schreiben $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$. Allerdings kann man bei konvergenten Reihen, die nicht absolut konvergieren, nicht jede beliebige komplexe Zahl durch Umordnung als Reihenwert erhalten.

Bsp. Wegen $|z^n| = |z|^n$ $(z \in \mathbb{C})$ sind die folgenden Reihen absolut konvergent für jedes $z \in \mathbb{C}$:

- $\exp z := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n!} z^n$
- $\sin z := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$
- $\cos z := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

Damit sind die Funktionen $\exp, \sin$ und $\cos$ auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt.

Satz 3 (Multiplikationssatz von CAUCHY) Seien $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ und $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$ zwei absolut konvergente Reihen in $\mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n\right) \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} z_k \cdot w_{n-k}\right).$$

Bem.

- Hieraus folgt für die Exponentialfunktion:

$$\exp z \cdot \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{w^{n-k} z^k}{(n-k)!k!} \frac{n!}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^k}_{=(w+z)^n} = \exp(w+z).$$

  Die Gleichung $\exp z \cdot \exp w = \exp(z+w)$ heißt *Additionstheorem* für die Exponentialfunktion.

- Wegen $\exp z \cdot \exp(-z) = \exp(z-z) = \exp 0 = 1$ gilt

$$\forall \quad z \in \mathbb{C}: \qquad \exp z \neq 0.$$

  Insbesondere ist $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus.

- Statt $\exp z$ schreibt man auch e^z $(z \in \mathbb{C})$.

Satz 4 Seien $w, z \in \mathbb{C}$, $z = x + \mathrm{i}y$. Dann gilt:

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z$
2. $\cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$
3. $\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$
4. $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
5. $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
6. $\exp z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$, also $|\exp(z)| = \mathrm{e}^x$ und $\operatorname{Arg}(\exp z) = y \bmod 2\pi$.

Weiter gilt die Eulersche *Formel*:

$$\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}} = 1$$

Bem. Es gilt:

$$\forall \quad w \in \mathbb{C}^\times \quad \exists \quad z \in \mathbb{C}, -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi : \qquad \exp z = w.$$

Damit vermittelt exp eine Bijektion zwischen $S := \mathbb{R} \times (-\pi, \pi]\mathrm{i}$ und $\mathbb{C}^\times$. Die Umkehrabbildung

$$\operatorname{Log} : \mathbb{C}^\times \to S, \qquad \operatorname{Log} w := \log |w| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} w$$

heißt *Hauptzweig* des *Logarithmus*.

Def. 9 Für $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ heißt $z^w := \exp(w \cdot \operatorname{Log} z)$ der *Hauptwert* von z^w.

Bem. Die obige Definition ist zunächst willkürlich. Definiert man für $w \in \mathbb{N}_0$ die Potenz z^w rekursiv durch $z^w = z \cdot z^{w-1}$, $z^0 = 1$ und ersetzt für $z \in (0, \infty)$ den komplexen Logarithmus Log durch den reellen Logarithmus log, so erhält man für diese Spezialfälle nach der obigen Definition das gleiche Ergebnis.

3 Stetigkeit

Zu $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ seien $B_r(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\}$.

Def. 10

1. $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt *offen*, falls gilt:
$$\forall \quad z \in U \quad \exists \quad r > 0 : \qquad B_r(z) \subseteq U.$$
2. Sei $U \subseteq V \subseteq \mathbb{C}$. U heißt *offen in* V, falls gilt:
$$\forall \quad z \in U \quad \exists \quad r > 0 : \qquad B_r(z) \cap V \subseteq U.$$

Bsp. Ist $V = \mathbb{R}$, so sind genau die Mengen U offen in V, die im Sinne der Analysis I offen sind. Ist $V = \mathbb{Z}$, so sind alle Mengen $U \subseteq \mathbb{C}$ offen in V.

Def. 11 Sei $V \subseteq \mathbb{C}$ und $f : V \to \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt *stetig* in $z \in V$, falls gilt: Für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$, die $f(z)$ enthält, enthält $f^{-1}(U)$ eine in V offene Umgebung von z. f heißt *stetig* auf V, falls für alle offenen Teilmengen $U \subseteq V$ die Menge $f^{-1}(U)$ in V offen ist.

Bsp. Ist $V = \mathbb{R}$, so ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ genau dann stetig auf V, wenn die Funktionen $\operatorname{Re} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind. Ist $V = \mathbb{Z}$, so sind alle Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ stetig.

Satz 5 Es sei $V \subseteq \mathbb{C}$, $f : V \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z \in V$ fest. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist stetig in z.
2. $\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 : \qquad f(B_\delta(z) \cap V) \subseteq B_\varepsilon(f(z))$.
3. Für jede gegen z konvergente Folge (z_n) in V gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z)$.

Satz 6 Sei $V \subseteq \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. Die Menge aller stetigen Funktionen von V nach $\mathbb{C}$ bilden einen Ring, d.h. mit f und g sind auch $f + g$, $f - g$ und $f \cdot g$ stetig auf V.
2. Ist $f : V \to \mathbb{C}^\times$ stetig, so ist auch die Funktion $\frac{1}{f}$ stetig auf V.
3. Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ und sind die Funktionen $g : U \to V$ und $f : V \to \mathbb{C}$ stetig, so ist auch die Funktion $f \circ g$ stetig.

Bsp.

- Jedes Polynom
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$
mit $a_i \in \mathbb{C}$ $(i = 0, \ldots, n)$ ist eine stetige Abbildung.
- Die Funktionen $\exp, \sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind stetig auf $\mathbb{C}$.

- Die Funktion Log ist *nicht* stetig, denn es gilt z.B. $\operatorname{Log}(-1) = \pi\mathrm{i}$, aber $\lim\limits_{\substack{z\to -1\\ \operatorname{Im} z<0}} \operatorname{Log}(z) = -\pi\mathrm{i}$.

Def. 12

1. $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, falls $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist. Zu $U \subseteq \mathbb{C}$ sei $\overline{U} \subseteq \mathbb{C}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die U enthält.
2. $a \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* von $U \subseteq \mathbb{C}$, falls gilt $a \in \overline{U \setminus \{a\}}$.
3. $K \subseteq \mathbb{C}$ heißt *kompakt*, falls für alle Familien $(U_i)_{i\in I}$ offener Teilmengen von $\mathbb{C}$ gilt: Ist $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und Indizes $i_0, \ldots, i_n \in I$ derart, daß gilt
$$K \subseteq \bigcup_{j=0}^{n} U_{i_j}.$$

Satz 7 (Satz von Bolzano-Weierstrass) Ist $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und (z_n) eine Folge in K, so hat (z_n) einen Häufungspunkt in K, d.h. es gibt ein $z \in K$, so daß für alle $r > 0$ unendlich viele Folgenglieder von (z_n) in $B_r(z)$ liegen.

Satz 8 (Satz von Heine-Borel) $K \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz 9 Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Dann gilt:

1. Ist $U \supseteq K$ und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, so ist $f(K)$ kompakt.
2. Ist $f : K \to \mathbb{C}$ stetig und injektiv, so ist $f^{-1} : f(K) \to K$ stetig.

4 Komplexe Differenzierbarkeit

Def. 13 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ sei ein Häufungspunkt von D. f heißt in a *komplex differenzierbar*, falls der Grenzwert
$$f'(a) := \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$
existert. In diesem Fall heißt $f'(a)$ die (*komplexe*) *Ableitung* von f an der Stelle a. Ist f in jedem Punkt $a \in D$ komplex differenzierbar, so heißt f *komplex differenzierbar* auf D und $f' : D \to \mathbb{C}$ ist eine Funktion.

Bsp. Ist $D \subseteq \mathbb{R}$, so ist $f : D \to \mathbb{C}$ genau dann komplex differenzierbar, falls $\operatorname{Re} f : D \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f : D \to \mathbb{R}$ reell differenzierbar sind. In diesem Fall gilt
$$f'(z) = (\operatorname{Re} f)'(z) + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)'(z) \qquad (z \in D).$$
Dies ist im allgemeinen falsch: Betrachte die Funktion
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \operatorname{Re} z.$$

Offensichtlich gilt hier $(\operatorname{Re} f)'(z) = 1$ und $(\operatorname{Im} f)'(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C}$, doch z.B. $f'(\mathrm{i})$ existiert wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re}(\mathrm{i} + \frac{1}{n})}{\mathrm{i} + \frac{1}{n} - \mathrm{i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re}(\mathrm{i}\cdot(1+\frac{1}{n}))}{\mathrm{i}\cdot(1+\frac{1}{n}) - \mathrm{i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n}\mathrm{i}} = 0.$$

nicht.

Bem.

- f ist in a genau dann komplex differenzierbar, wenn es eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{C}$ gibt, die in a stetig ist und für die gilt:

  $$\forall \quad z \in D : \qquad f(z) = f(a) + (z-a)\cdot\varphi(z).$$

  In diesem Fall gilt $\varphi(a) = f'(a)$.

- Ist f in a komplex differenzierbar, so ist f dort auch stetig.

Satz 10 Es seien $a \in D \subseteq \mathbb{C}$ und $f, g : D \to \mathbb{C}$ in a komplex differenzierbar. Dann sind auch $f+g$, $f\cdot g$, $\lambda\cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) und $\frac{f}{g}$ (falls $g(a) \neq 0$) in a differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a)\\
(\lambda f)'(a) &= \lambda f'(a)\\
(f\cdot g)'(a) &= f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}
\end{aligned}$$

Bsp. Für $n \in \mathbb{N}$ sind alle Funktionen

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f_n(z) := z^n$$

komplex differenzierbar und es gilt $f_n'(z) = nz^n$ $(n \in \mathbb{N})$, denn

$$\begin{aligned}
z^n = (a + z - a)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (z-a)^k\\
&= a^n - \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (z-a)^{n-k-1}\right)}_{=:\varphi(z)} (z-a)
\end{aligned}$$

und $\varphi(a) = na^{n-1}$. Weiter folgt aus der Quotientenregel auch die komplexe Differenzierbarkeit der Funktionen f_n für $n \in \mathbb{Z}$.

Satz 11 Seien $\tilde{D}, D \subseteq \mathbb{C}$. $f : D \to \mathbb{C}$ sei komplex differenzierbar in $a \in D$. Weiter sei $f(D) \subseteq \tilde{D}$ und $g : \tilde{D} \to \mathbb{C}$ sei komplex differenzierbar in $f(a)$. Dann ist auch $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in a und es gilt:

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a).$$

5 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Def. 14 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^2$ eine Funktion. f heißt in $a \in D$ *total differenzierbar*, falls es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + r(x) \qquad (x \in D),$$

wobei $\frac{r(x)}{|x-a|} \xrightarrow{x \to a} 0$. In diesem Fall heißt $Df(a) := A$ die (*totale*) *Ableitung* von f in a.

Bem. Wenn man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert, so stellt sich die Frage, wie die totale mit der komplexen Differenzierbarkeit zusammenhängt. Offensichtlich gilt: f ist genau dann komplex differenzierbar in z, wenn f in z total differenzierbar ist und $Df(z)$ sich in $\mathbb{C}$ als Multiplikation mit einer komplexen Zahl interpretieren läßt.

Satz 12 Sei $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\exists \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall \quad z \in \mathbb{C}: \qquad A(z) = \lambda z$
2. A ist $\mathbb{C}$-linear
3. $A(\mathrm{i}) = \mathrm{i}A(1)$
4. Die Darstellungsmatrix von A zur Basis $\{1, \mathrm{i}\}$ hat für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Form

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Bem.

- Die Abbildung

$$\mathbb{C} \ni z = x + \mathrm{i}y \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

  ist ein Ringhomomorphismus.

- Die linearen Abbildungen der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \neq 0$$

  sind gerade die Drehstreckungen des $\mathbb{R}^2$ um das Zentrum 0.

Satz 13 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $a \in D$. Die Abbildungen $u, v : D \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y) \qquad ((x,y) \in D).$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist in a komplex differenzierbar

2. f ist in a total differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}u(a) = \frac{\partial}{\partial y}v(a), \qquad \frac{\partial}{\partial y}u(a) = -\frac{\partial}{\partial x}v(a).$$

Bem. Die Gleichungen in 2. heißen CAUCHY-RIEMANN*sche Differentialgleichungen.* $f : U \to \mathbb{C}$ ist auf ganz U komplex differenzierbar, wenn f auf ganz U stetig partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen die CAUCHY-RIEMMANNschen Differentialgleichungen erfüllen.

Bsp.

- Betrachte $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) := z^2$. Wegen

$$(x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$$

  gilt hier

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \qquad \text{und} \qquad v(x, y) = 2xy.$$

  Wegen

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) = 2x = \frac{\partial}{\partial y}v(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y}v(x, y) = -2y = -\frac{\partial}{\partial x}v(x, y)$$

  ist f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

- Betrachte $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \overline{z}$. Hier gilt

$$u(x, y) = x, \quad \text{und} \quad v(x, y) = -y.$$

  Wegen

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) = 1 \neq -1 = \frac{\partial}{\partial y}v(x, y)$$

  ist f in keinem Punkt aus $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Satz 14 Die Funktionen $\exp, \sin$ und $\cos$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar und es gilt:

$$\exp' = \exp, \qquad \sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin.$$

Satz 15 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist *lokal-konstant*, d.h.

$$\forall \quad a \in U \quad \exists \quad \varepsilon > 0 : \qquad B_\varepsilon(a) \subseteq U \quad \wedge \quad f|_{B_\varepsilon(a)} \text{ ist konstant}$$

2. f ist komplex differenzierbar und es gilt $f' = 0$.

Bem. Ist f komplex differenzierbar und nimmt f nur reelle Werte an, so ist f lokal-konstant.

6 Konforme Abbildungen

Def. 15 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ in $a \in \mathbb{C}$ total differenzierbar. Weiter sei A die JAKOBI-Matrix von f in a. f heißt *infinitisimal konform*, wenn $\det A > 0$ ist und A die Winkel zwischen Geraden erhält.

Satz 16 Sei $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\det A > 0$ und A erhält die Winkel zwischen Geraden.
2. Die Abbildungsmatrix von A zur Basis $\{1, \mathrm{i}\}$ hat die Form
$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$
mit $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Diese Matrizen A sind gerade die Drehstreckungen.

Satz 17 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$. Dann gilt: f ist genau dann infinitisimal konform in jedem Punkt $a \in U$, wenn f holomorph ist und f' auf U keine Nullstelle hat.

Bsp.

- Die Abbildung $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}, f(z) := z^2$ ist infinitisimal konform.
- Die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) := a \cdot z + b$ mit $a \in \mathbb{C}^\times$, $b \in \mathbb{C}$ ist infinitisimal konform.
- Abbildungen der Form
$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \qquad f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$
mit $ad - bc \neq 0$ heißen MÖBIUS-*Transformationen* (oder *gebrochen lineare Transformationen*). Dabei ist $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und man setzt
$$f(-\frac{d}{c}) := \infty \qquad \text{und} \qquad f(\infty) = \frac{a}{c}.$$
$\hat{\mathbb{C}}$ heißt RIEMANN*sche Zahlenkugel*. Jede MÖBIUS-Transformation ist infinitisimal konform. Die Verkettung zweier MÖBIUS-Transformationen ist wieder eine MÖBIUS-Transformation. MÖBIUS-Transformationen sind bijektive Abbildungen von $\hat{\mathbb{C}}$ in sich. Kreise und Geraden werden durch MÖBIUS-Transformationen wieder auf Kreise oder Geraden abgebildet.

  Betrachten wir die spezielle Transformation
$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \qquad f(z) := \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$
und die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Es ist $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und man findet leicht
$$f(\partial\mathbb{H}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$
und damit ist das Bild von $\mathbb{H}$ unter f der Einheitskreis $\mathbb{E}$.

7 Holomorphie

Def. 16 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ auf ganz U komplex differenzierbar. Dann heißt f *holomorph* (oder *komplex analytisch* oder *regulär*) auf U. f heißt *holomorph* in $a \in U$, wenn es eine offene Umgebung von a gibt, auf der f holomorph ist.

Bsp. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) := |z|^2$ ist in keinem Punkt holomorph. Zwar ist sie in $z = 0$ komplex differenzierbar, aber eben nur dort: Die JAKOBI-Matrix von f lautet

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen können somit nur erfüllt werden im Fall $x = y = 0$, also $z = 0$.

Def. 17 $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *zusammenhängend*, falls für alle in D offenen, disjunkten Mengen U, V mit $D = U \cup V$ gilt $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.

Bsp.

- $D := \{1, \mathrm{i}\}$ ist nicht zusammenhängend: Wähle $U = \{1\}$ und $V = \{\mathrm{i}\}$.
- $D \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn D ein Intervall ist.

Satz 18 $D \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn jede lokal-konstante Funktion f auf D konstant ist.

Satz 19 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend und $f : D \to \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. Ist f stetig, so ist $f(D)$ zusammenhängend.
2. Ist D offen und f holomorph auf D, so ist $\operatorname{Re} f$ bis auf eine additive Konstante eindeutig durch $\operatorname{Im} f$ bestimmt.

Satz 20 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und f' stetig auf D.

1. Für $a \in D$ gelte $f'(a) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von a derart, daß $f|_U$ injektiv ist.
2. Ist f injektiv und hat f' keine Nullstellen auf D, so ist $f(D)$ offen, $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{C}$ ist holomorph und es gilt
$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \qquad (z \in D).$$

Bsp.

- Sei $S := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$. Dann ist
$$f : S \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \exp z$$
injektiv und es gilt $f' = f$ auf S. Außerdem hat f auf S keine Nullstelle. Es gilt
$$\exp(S) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

und

$$\mathrm{Log} : \exp(S) \to S \subseteq \mathbb{C}$$

ist die Umkehrung von exp. Damit ist Log holomorph und es gilt

$$\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\})$$

- Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Weiter seien

  $$\begin{aligned} u : D \to \mathbb{R}, &\qquad u(x,y) := \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y), \\ v : D \to \mathbb{R}, &\qquad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y), \end{aligned}$$

  also $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$. Es stellt sich die Frage, welche Bedingung eine Funktion u erfüllen muß, um überhaupt Realteil einer holomorphen Funktion f sein zu können. Ist u zweimal stetig partiell differenzierbar und ist f holomorph, so ist notwendig auch v zweimal stetig partiell differenzierbar und unter Verwendung des Satzes von SCHWARZ sowie der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen erhält man:

  $$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} v(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = 0.$$

  Funktionen u mit

  $$\Delta u(x,y) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y) = 0$$

  heißen *harmonische* Funktionen oder *Potentiale*. Der Operator Δ heißt LAPLACE-*Operator*.

Satz 21 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes, achsenparalleles Rechteck und $u : D \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Dann existiert eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y)$ $((x,y) \in D)$.

Bem.

- Der Imaginärteil v von f ist bis auf eine reelle additive Konstante eindeutig bestimmt und solch ein v heißt zu u *konjugiert harmonische* Funktion.

- Ist $u : D \to \mathbb{R}$ harmonisch und $\varphi : U \to D$ holomorph derart, daß φ' nirgends verschwindet, dann ist auch $u \circ \varphi$ harmonisch. Allgemein gilt für holomorphe Funktionen u, φ:

  $$\Delta(u \circ \varphi) = (\Delta u) \circ \varphi \cdot |\varphi'|^2.$$

8 Komplexe Kurvenintegrale

Def. 18 Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $f := u + \mathrm{i}v$ eine Funktion. Dann heißt

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b u(t)dt + \mathrm{i}\int_a^b v(t)dt,$$

das *Integral* von a bis b über f, sofern die reellen Integrale auf der rechten Seite existieren. f heißt *integrierbar*, falls u und v im Sinne der Analysis I integrierbar sind. Weiter sei

$$\int_b^a f(t)dt := -\int_a^b f(t)dt.$$

Satz 22 Es seien $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f,g : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrierbare Funktionen, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$
2. Ist $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $F' = f$ auf $[a,b]$, so gilt
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$
3. $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$
4. $\int_a^b (f \cdot g')(t)dt = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b (f' \cdot g)(t)dt$, falls f und g differenzierbar sind.
5. Ist $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ differenzierbar, so gilt
$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)dt = \int_c^d (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)dt$$

Def. 19 Eine stetige Abbildung $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *Kurve* in $\mathbb{C}$. Eine Kurve α heißt *glatt*, falls α zusätzlich differenzierbar ist. α heißt *stückweise glatt*, wenn es eine Zerlegung

$$Z = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

von $[a,b]$ gibt, daß $\alpha|_{[a_i,a_{i+1}]}$ glatt ist für $i = 0, \ldots, n-1$. Die Kurve α heißt *geschlossen* im Fall $\alpha(a) = \alpha(b)$. Zur Kurve α heißt

$$L(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)|dt$$

die *Bogenlänge*.

$$\alpha^- : [a,b] \to \mathbb{C}, \qquad \alpha^-(t) := \alpha(a+b-t)$$

heißt die zur Kurve α *reziproke* Kurve.

Bsp.

- Sind $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, so ist

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}, \qquad \alpha(t) := z_1 + t \cdot (z_2 - z_1)$$

die *Verbindungsstrecke* von z_1 und z_2. Die Kurve

$$\beta : [0,2] \to \mathbb{C}, \qquad \beta(t) := \begin{cases} \alpha(t) & t \leq 1 \\ \alpha(2-t) & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

hat zwar das gleiche Bild wie α, wird aber dennoch als eine von α verschiedene Kurve aufgefaßt.

- Für $n \in \mathbb{N}$ beschreibt die Kurve

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) := \exp(2\pi i n t)$$

einen n-fachen Umlauf um den Einheitskreis.

Def. 20 Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine glatte Kurve und $\alpha([a,b]) \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$ stetig. Weiter sei $f : D \to \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\int_\alpha f(z)dz := \int_a^b (f \circ \alpha)(t) \cdot \alpha'(t)dt$$

das *Kurvenintegral* über f längs α. Ist α stückweise glatt und

$$Z = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$$

eine passende Zerlegung von $[a,b]$, so definiert man

$$\int_\alpha f(z)dz := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f \circ \alpha)(t) \cdot \alpha'(t)dt.$$

Ist α eine geschlossene Kurve, so verwendet man zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts auch die Schreibweise

$$\oint_\alpha f(z)dz := \int_\alpha f(z)dz.$$

Satz 23 Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ integrierbare Funktionen, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, α eine Kurve in D. Dann gilt

1. $\displaystyle\int_\alpha (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda \int_\alpha f(z)dz + \mu \int_\alpha g(z)dz$

2. $\displaystyle|\int_\alpha f(z)dz| \leq L(\alpha) \cdot \sup_{t \in [a,b]} |f(\alpha(t))|$

3. Ist $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ differenzierbar, $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$ und $\alpha : [c,d] \to D$ glatt. Dann gilt

$$\int_\alpha f(z)dz = \int_{\alpha\circ\varphi} f(z)dz.$$

4. Hat f auf D eine Stammfunktion F, dann gilt

$$\int_\alpha f(z)dz = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a))$$

Satz 24 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. f habe eine Stammfunktion auf D. Dann gilt für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve α in D

$$\int_\alpha f(z)dz = 0$$

Bsp. Sei $r > 0$ und

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}^\times, \qquad \alpha(t) := r \cdot \exp(2\pi \mathrm{i} t).$$

Zu $n \in \mathbb{Z}$ sei

$$f_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times, \qquad f_n(z) = z^n.$$

Dann gilt

$$\int_\alpha f(z)dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi\mathrm{i} & n = -1 \end{cases}$$

Bew.: Im Fall $n \neq -1$ hat f_n eine Stammfunktion, nämlich

$$F_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times, \qquad F_n(t) := \frac{1}{n} z^{n+1}.$$

Für $n = -1$ gilt:

$$\int_\alpha f_{-1}(z)dz = \int_0^1 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt = \int_0^1 \frac{1}{r\cdot\exp(2\pi\mathrm{i}t)} r 2\pi\mathrm{i} \cdot \exp(2\pi\mathrm{i}t)dt = 2\pi\mathrm{i}.$$

∎

Bem. Insbesondere gilt: Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ hat keine Stammfunktion.

Def. 21 Zu $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ bezeichnet $s(z_1, z_2) : [0,1] \to \mathbb{C}$ die *Verbindungsstrecke* von z_1 nach z_2. Weiter schreiben wir

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz := \int_{s(z_1,z_2)} f(z)dz.$$

9 Der Integralsatz von Cauchy

Def. 22 Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, so heißt D *Gebiet*.

Bsp. Die Mengen $\mathbb{C}^\times$, $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ und

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}, \qquad \mathbb{E} = B_1(0)$$

sind Gebiete. Dagegen ist z.B. $\mathbb{R}$ kein Gebiet, da $\mathbb{R}$ nicht offen in $\mathbb{C}$ ist.

Satz 25 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann gilt: D ist genau dann ein Gebiet, wenn sich je zwei Punkte $z_1, z_2 \in D$ durch einen komplett in D liegenden Polygonenzug verbinden lassen.

Def. 23 Es seien $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\beta : [c,d] \to \mathbb{C}$ Kurven mit $\alpha(b) = \beta(c)$. Dann heißt die Kurve

$$\alpha * \beta : [0,2] \to \mathbb{C}, \ (\alpha * \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(a + (b-a)t) & t \in [0,1] \\ \beta(c + (d-c)(t-1)) & t \in (1,2] \end{cases}$$

die *Verkettung* von α und β.

Bem. Sind α und β stückweise glatt, so ist auch $\alpha * \beta$ stückweise glatt. Liegen die Bilder von α und β vollständig in $U \subseteq \mathbb{C}$ und ist $f : U \to \mathbb{C}$ integrierbar, so gilt

$$\int\limits_{\alpha*\beta} f(z)dz = \int\limits_{\alpha} f(z)dz + \int\limits_{\beta} f(z)dz.$$

Im Folgenden seien alle betrachteten Kurven stückweise glatt.

Satz 26 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f hat auf D eine Stammfunktion.
2. Für jede geschlossene Kurve α in D gilt $\int\limits_{\alpha} f(z)dz = 0$.
3. Für je zwei Kurven $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $\beta : [c,d] \to \mathbb{C}$ mit $\alpha(a) = \beta(c)$ und $\alpha(b) = \beta(d)$ gilt

$$\int\limits_{\alpha} f(z)dz = \int\limits_{\beta} f(z)dz.$$

Def. 24 Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Dann heißt

$$\Delta(z_1, z_2, z_3) := \{\sum_{i=1}^{3} t_i z_i : 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=1}^{3} t_i = 1\} \subseteq \mathbb{C}$$

das von z_1, z_2, z_3 aufgespannte *Dreieck*. Die Schreibweise $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ steht für einer Kurve, der den Rand $\partial\Delta(z_1, z_2, z_3)$ genau einmal umläuft.

Satz 27 (CAUCHY-Integralsatz für Dreieckswege, Lemma von GOURSAT, Fundamentalsatz der Funktionentheorie) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. $z_1, z_2, z_3 \in D$ seien so gewählt, daß gilt $\Delta(z_1, z_2, z_3) \subseteq D$. Dann gilt

$$\int\limits_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(z)dz = 0.$$

Def. 25 Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, falls es ein $z_* \in D$ gibt so, daß für alle $z \in M$ die Verbindungsstrecke zwischen z_* und z vollständig in D liegt. Ein sternförmiges Gebiet heißt *Sterngebiet*. z_* heißt *Sternmittelpunkt* von D.

Bsp.

- Jede konvexe Menge ist sternförmig.
- $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ ist sternförmig.
- $\mathbb{C}^\times$ ist nicht sternförmig.

Satz 28 (CAUCHY-Integralsatz für Sterngebiete) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

1. f hat eine Stammfunktion auf D.
2. Für jede geschlossene Kurve $\alpha : [0, 1] \to D$ gilt

$$\int\limits_\alpha f(z)dz = 0.$$

Satz 29 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f lokal eine Stammfunktion, d.h. jedes $z \in D$ hat eine Umgebung U, so daß $f|_U$ eine Stammfunktion hat.

Satz 30 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet mit Sternmittelpunkt z_* und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und in allen Punkten $z \in D \setminus \{z_*\}$ holomorph. Dann hat f eine Stammfunktion auf D.

Def. 26 Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *Elementargebiet*, falls jede holomorphe Funktion auf D eine Stammfunktion hat.

Bsp. Jedes Sterngebiet ist ein Elementargebiet.

Bem. Sind $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ Elementargebiete und ist $D_1 \cap D_1$ nichtleer und zusammenhängend, so ist auch $D_1 \cup D_2$ ein Elementargebiet.

Satz 31 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet. $f : D \to \mathbb{C}$ und $f' : D \to \mathbb{C}$ seien holomorph und es gelte $f \neq 0$ auf D. Dann existiert eine holomorphe Funktion $h : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \exp h(z) \qquad (z \in D)$$

Bem.

- Die Funktion h aus obigem Satz heißt *analytischer Zweig* des Logarithmus von f.
- Zusätzlich gilt:

$$\forall \quad n \in \mathbb{N} \quad \exists \quad H : D \to \mathbb{C} \text{ holomorph}: \qquad H^n = f.$$

Setze $H(z) := \exp(\frac{1}{n}h(z))$.

10 Die Integralformel von Cauchy

Satz 32 Es seien $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0, a \in B_r(z_0)$. Weiter sei

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}, \qquad \alpha(t) := z_0 + r \cdot \exp(2\pi \mathrm{i} t).$$

Dann gilt

$$\int\limits_{\alpha} \frac{1}{\zeta - a} d\zeta = 2\pi \mathrm{i}$$

Satz 33 (Integralformel von Cauchy) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter seien $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$. Dann gilt

$$2\pi \mathrm{i} f(z) = \int\limits_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (z \in B_r(z_0)),$$

wobei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}, \alpha(t) = z_0 + r \cdot \exp(2\pi \mathrm{i} t)$.

Bem. Für $z = z_0$ reduziert sich die Integralformel auf die *Mittelpunktsgleichung*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + r \cdot \exp(t\mathrm{i}))dt$$

Satz 34 (Leibnitz-Regel) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \times [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die für festes $t \in [a,b]$ holomorph ist. Weiter sei die komplexe Ableitung f' von f bei festem $t \in [a,b]$ ebenfalls stetig. Dann ist die Funktion

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad F(z) := \int\limits_a^b f(z,t)dt$$

holomorph auf D und es gilt

$$F'(z) = \int\limits_a^b f'(z,t)dt \qquad (z \in D)$$

Satz 35 (Verallgemeinterte Integralformel von CAUCHY) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter seien $z_0 \in D$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$. Dann ist f beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$\forall \quad n \in \mathbb{N} \quad \forall \quad z \in B_r(z_0) : \qquad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

wobei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}, \alpha(t) = z_0 + r \cdot \exp(2\pi \mathrm{i} t)$.

Satz 36 (Satz von MORERA) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Für je drei paarweise verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in D$ mit $\Delta(z_1, z_2, z_3) \subseteq D$ gelte

$$\int\limits_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Dann ist f holomorph auf D.

Def. 27 Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *ganz*.

Satz 37 (Satz von LIOUVILLE) Jede beschränkte, ganze Funktion ist konstant.

Satz 38 (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes nichtkonstante, komplexe Polynom hat in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.

Satz 39 Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist holomorph.
2. Für jedes Dreieck $\Delta(z_1, z_2, z_3) \subseteq D$ gilt $\int\limits_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(z) dz = 0$.
3. f hat überall in D lokal eine Stammfunktion.
4. Für jede Kreisscheibe $\overline{B_r(z_0)} \subseteq D$ gilt $2\pi \mathrm{i} f(z) = \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.
5. f ist unendlich oft differenzierbar.
6. Es gibt ein $a \in D$, so daß f auf $D \setminus \{a\}$ holomorph ist.

Bsp. Es sei $\tilde{\mathbb{H}}$ eine offene Obermenge von $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. $h : \tilde{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und beschränkt. Weiter sei

$$g : \tilde{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}, \qquad g(z) := \frac{h(z)}{1 + z^2}.$$

Gesucht ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$. Es gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x)}{1 + x^2} dx = \lim_{R \to \infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{h(x)}{1 + x^2} dx.$$

Es sei $K_R : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{C}, K_R(t) := R \cdot \exp(2\pi \mathrm{i} t)$. α_R bezeichne die Verkettung von K_R mit $s(-R, R)$. Dann gilt für $R > 1$:

$$\int\limits_{\alpha_R} g(z)dz = \int\limits_{\alpha_R} \frac{\frac{h(z)}{z+\mathrm{i}}}{z - \mathrm{i}} dz = 2\pi\mathrm{i}\frac{h(\mathrm{i})}{\mathrm{i}+\mathrm{i}} = \pi h(\mathrm{i}).$$

Weiter gilt $|h(z)| < C \in \mathbb{C}$ und damit

$$|\int\limits_{K_R} g(z)dz| \leq \pi R \cdot \max_{z \in K_R([0,\frac{1}{2}])} \frac{1}{1+z^2} \cdot C \leq \pi C R \frac{1}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \to \infty} 0.$$

Also gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \lim_{R \to \infty} \int\limits_{\alpha_R} g(x)dx = \pi \cdot h(\mathrm{i}).$$

Speziell für $h = 1$ folgt hieraus

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

11 Gleichmäßige Konvergenz

Def. 28 Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig konvergent*, wenn es eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \quad n \geq n_0 : \qquad \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

(f_n) heißt *lokal konvergent* gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls für jedes $z \in D$ eine offene Umgebung U existiert, so daß $(f_n|_U)$ gleichmäßig gegen $f|_U$ konvergiert.

Bem.

- Eine lokal gleichmäßig konvergente Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf jedem Kompaktum $K \subseteq D$. Man sagt auch: (f_n) konvergiert *kompakt gleichmäßig.* Ist D offen und (f_n) auf jedem Kompaktum $K \subseteq D$ gleichmäßig konvergent, so konvergiert (f_n) auch lokal gleichmäßig.

- Ist (f_n) eine Folge stetiger Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, so ist auch f stetig.

Satz 40 Sei (f_n) eine Folge stetiger Funktionen $D \to \mathbb{C}$, die lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. $\alpha : [a, b] \to D$ sei eine Kurve. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{\alpha} f_n(z)dz = \int\limits_{\alpha} f(z)dz.$$

Satz 41 (Satz von WEIERSTRASS) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen auf D, die lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f holomorph und (f_n') konvergiert lokal gleichmäßig gegen f'.

Def. 29 Ist (f_n) eine Folge von Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{C}$, so heißt $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *gleichmäßig konvergent*, wenn die Folge der Partialsummen gleichmäßig konvergiert. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt *normal konvergent*, wenn für jedes $z \in D$ eine Folge (M_n) in $(0, \infty)$ mit $|f_n(z)| \leq M_n$ existiert, für die die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ konvergiert.

Bem. Normale Konvergenz impliziert lokal gleichmäßige Konvergenz und absolute Konvergenz.

Satz 42 (Satz von WEIERSTRASS) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine normal konvergente Reihe holomorpher Funktionen auf D. Dann ist auch die Grenzfunktion f dieser Reihe holomorph, es gilt $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ und auch die Konvergenz dieser Reihe ist normal.

Bsp. Für $n \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{C}$ sei $n^s := \exp(s \log n)$. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

auf $D := \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1\}$ normal konvergent. Für $\operatorname{Re} s > 1 + \varepsilon$ gilt sogar

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n^s}| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty.$$

Durch diese Reihe wird auf D eine holomorphe Funktion definiert:

$$\zeta : D \to \mathbb{C}, \qquad \zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Die Funktion ζ heißt RIEMANN*sche ζ-Funktion.* Es wird sich zeigen (vgl. S. 35), daß es möglich ist, ζ auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph fortzusetzen.

12 Potenzreihen

Satz 43 Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gibt es eine Zahl $r \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ derart, daß die Reihe für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(0)}$ divergiert und für alle $z \in B_r(0)$ die Reihe normal konvergiert. Dabei gilt:

$$r = \sup\{\varrho \geq 0 : (a_n \varrho^n) \text{ ist beschränkt}\}$$

Bem. Die Zahl r aus obigem Satz heißt *Konvergenzradius* und $B_r(0)$ heißt *Konvergenzbereich*.

Satz 44 Jede Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definiert im Inneren ihres Konvergenzbereichs eine holomorphe Funktion f. Ferner gilt $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ $(z \in B_r(0))$.

Bem. Am Rand des Konvergenzbereichs einer Potenzreihe können alle möglichen Mischformen von Konvergenz und Divergenz auftreten.

Satz 45 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $r > 0$ und $w \in D$ mit $\overline{B_r(w)} \subseteq D$. Dann gilt:

$$\forall \quad z \in B_r(w) : \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n$$

mit $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(w)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Satz 46 Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist holomorph auf D.
2. Auf jeder ganz in D enthaltenen Kreisscheibe läßt sich F als Potenzreihe entwickeln.
3. Jeder Punkt $z \in D$ hat eine offene Umgebung $U \subseteq D$, auf der sich f als Potenzreihe entwickeln läßt.

Bem. Eine Funktion, die 3. erfüllt, heißt *analytisch*. Die Potenzreihe, die eine Funktion f in der Umgebung eines Punktes z lokal beschreibt, wird auch als TAYLOR-*Reihe* von f im Punkt z bezeichnet.

Satz 47

1. Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradius $r > 0$, die auf $B_r(0)$ die gleiche Funktion f darstellen, dann gilt $a_n = b_n$ $(n \in \mathbb{N})$.
2. Sind $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradius $r > 0$, so ist auch $f \cdot g$ holomorph auf $B_r(0)$ und es gilt

   $$(f \cdot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \text{mit} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

   Schreibt man $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, b_{n-k} = \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$ und $c_n = \frac{(f \cdot g)^{(n)}(0)}{n!}$, so folgt hieraus die *allgemeine Produktregel*

   $$(f \cdot g)^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z) \cdot g^{(n-k)}(z).$$

3. Ist $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $B_r(0)$ mit $a_0 \neq 0$, so ist f in einer Umgebung um 0 invertierbar.

4. (WEIERSTASSscher Doppelreihensatz) Sei $r > 0$ und für $j \in \mathbb{N}$ sei

$$f_j(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n_j} z^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Wenn $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ auf $B_r(0)$ normal konvergiert, dann ist die Grenzfunktion f holomorph auf $B_r(0)$ und es gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n \sum_{j=0}^{\infty} a_{n_j} \right)$$

Bsp. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\exp(z)-1}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

f ist in einer kleinen Umgebung um 0 invertierbar. Es sei

$$\frac{1}{f}(z) := g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Wir setzen $B_n := n! b_n$. Die Zahlen B_n $(n \in \mathbb{N})$ heißen BERNOULLI-*Zahlen*. Aus $f(z) \cdot g(z) = 1$ folgt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{array} \right.$$

Multiplikation mit $(n+1)!$ ergibt

$$B_0 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_{n-k} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dies führt rekursiv auf

$$B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$$

Für $k \geq 1$ ist $B_{2k+1} = 0$. Es wird sich zeigen, daß außerdem gilt

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

13 Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

Satz 48 Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, aber nicht konstant. Dann gilt: Die Menge aller Nullstellen von f hat in D keinen Häufungspunkt.

Bsp. Betrachte zu $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := z^n \sin \frac{1}{z}.$$

Diese Funktion kann nicht holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden, da ihre Nullstellenmenge den Häufungspunkt 0 hat und die Existenz einer holomorphen Fortsetzung somit ein Widerspruch zu obigem Satz wäre.

Satz 49 (Identitätssatz) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g : D \to \mathbb{C}$ seien holomorphe Funktionen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $f = g$
2. $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt in D
3. $\exists \quad z \in D \quad \forall \quad n \in \mathbb{N} : \qquad f^{(n)}(z) = g^{(n)}(z)$

Satz 50 (Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $M \subseteq D$ habe einen Häufungspunkt in D. $\tilde{f} : M \to \mathbb{C}$ sei eine Abbildung. Dann gibt es höchstens eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $f|_M = \tilde{f}$.

Bem. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, so ist D genau dann zusammenhängend, wenn $R := \{f : D \to \mathbb{C} : f \text{ ist holomorph}\}$ ein nullteilerfreier Ring ist.

Satz 51 (Gebietstreue) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante, holomorphe Funktion. Dann ist auch $f(D)$ ein Gebiet.

Bem.

- Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(D)$ nicht offen, so ist f konstant. Dies gilt z.B. im Fall $f(D) \subseteq \mathbb{R}$.
- (*Maximumsprinzip*) Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und nimmt f auf D ein Betragsmaximum an, so ist f konstant.
- (*Minimumsprinzip*) Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Besitzt dann f in $a \in D$ ein lokales Betragsminimum, so gilt $f(a) = 0$.

Satz 52 (Lemma von Schwarz) Es sei $\mathbb{E} := B_1(0)$ und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ $(z \in \mathbb{E})$ sowie $|f'(0)| \leq 1$.

Satz 53 Ist $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph und bijektiv und gilt $f(0) = 0$, so existiert ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ und $f(z) = \zeta \cdot z$ $(z \in \mathbb{E})$.

Bsp. Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Mit

$$\operatorname{Konf} D := \{f : D \to D : f \text{ holomorph und bijektiv}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller auf D holomorphen Bijektionen. Weiter sei

$$G := \{\begin{pmatrix} u & v \\ \overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} : |u|^2 - |v|^2 = 1\}$$

und zu $M \in G$ sei

$$\Phi_M : \mathbb{E} \to \mathbb{C}, \qquad \Phi_M(z) = \frac{uz+v}{\overline{v}z+\overline{u}}.$$

Dann gilt:

$$\operatorname{Konf} \mathbb{E} = \{\Phi_M : M \in G\} \cong {}^{G}/_{\{\pm I\}}$$
$$\operatorname{Konf} \mathbb{H} = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc = 1\}.$$

14 Singularitäten holomorpher Funktionen

Def. 30 Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und es gebe ein $a \in \mathbb{C} \setminus D$ mit

$$\exists \quad r > 0 : \qquad B_r(a) \setminus \{a\} \subseteq D.$$

Dann heißt a (*isolierte*) *Singularität* von f. Die Singularität heißt *hebbar*, wenn sich f holomorph nach $D \cup \{a\}$ fortsetzen läßt. Die Singularität heißt *außerwesentlich*, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $z \mapsto f(z) \cdot (z-a)^m$ eine hebbare Singularität hat. In allen anderen Fällen heißt die Singularität in a *wesentlich*.

Satz 54 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine Singularität von f. Dann gilt: Die Singularität in a ist genau dann hebbar, wenn es ein $r > 0$ gibt, so daß f auf $B_r(a) \setminus \{a\}$ beschränkt ist.

Satz 55 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, a eine außerwesentliche, isolierte Singularität von f. f sei nicht konstant Null. Dann existiert

$$\min\{k \in \mathbb{Z} : z \mapsto (z-a)^k f(z) \text{ ist hebbar in } a\}$$

Def. 31 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, a eine außerwesentliche, isolierte Singularität von f. f sei nicht konstant Null. $m \in \mathbb{Z}$ sei so gewählt, daß $z \mapsto (z-a)^m f(z)$ in a hebbar ist und es sei

$$(z-a)^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Dann heißt

$$\operatorname{ord}_a(f) := \min\{k : c_k \neq 0\} - m$$

die *Ordnung* der Singularität a von f. Ist $f = 0$ auf $B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, so sei

$$\operatorname{ord}_a(f) := \infty.$$

Bem. Der Begriff der Ordnung stellt eine Verallgemeinerung der Nullstellenordnung dar:

$$\operatorname{ord}_a(f) \begin{cases} \geq 0 & \Longleftrightarrow & f \text{ hat in } a \text{ eine hebbare Singularität} \\ > 0 & \Longleftrightarrow & f(a) = 0 \\ = 0 & \Longleftrightarrow & f(a) \neq 0 \\ < 0 & \Longleftrightarrow & a \text{ ist eine nicht hebbare,} \\ & & \text{außerwesentliche Singularität} \end{cases}$$

Nicht hebbare, außerwesentliche Singularitäten einer Funktion heißen *Pole*.

Satz 56 Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit einer außerwesentlichen Singularität in $a \in \mathbb{C} \setminus D$. Dann haben auch die Funktionen $f \pm g, f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls g keine Nullstellen in D hat) in a eine außerwesentliche Singularität und es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_a(f \pm g) &\geq \min\{\operatorname{ord}_a(f), \operatorname{ord}_a(g)\} \\ \operatorname{ord}_a(f \cdot g) &= \operatorname{ord}_a(f) + \operatorname{ord}_a(g) \\ \operatorname{ord}_a(\frac{f}{g}) &= \operatorname{ord}_a(f) - \operatorname{ord}_a(g). \end{aligned}$$

Satz 57 Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in \mathbb{C} \setminus D$ ein Pol von f. Dann gilt

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$$

Satz 58 (Satz von Casorati-Weierstrass) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in \mathbb{C} \setminus D$ eine wesentliche Singularität von f. Dann gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \subseteq D$ liegt $f(B_\varepsilon(a) \setminus \{a\})$ dicht in $\mathbb{C}$.

Bsp. Die Funktion

$$f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := z^n \sin \frac{1}{z}$$

läßt sich für kein $n \in \mathbb{N}$ holomorph nach 0 fortsetzen. Damit ist die Singularität in 0 wesentlich.

Satz 59 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ sei holomorph und habe in $a \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität. Dann gilt:

1. a ist hebbar $\Longleftrightarrow$ f ist in einer Umgebung von a beschränkt
2. a ist ein Pol $\Longleftrightarrow \lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$
3. a ist wesentlich $\Longleftrightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$ liegt $f(B_\varepsilon(a) \cap D)$ dicht in $\mathbb{C}$.

Satz 60 (großer Satz von Picard) Ist a eine wesentliche Singularität, so gilt:

$$\exists \quad c \in \mathbb{C} \quad \forall \quad r > 0 : \qquad \mathbb{C} \setminus \{c\} \subseteq f(B_r(a) \cap D).$$

15 LAURENT-Reihen und LAURENT-Entwicklung

In diesem Abschnitt seien $0 \leq r < R \leq \infty$ fest und

$$\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}.$$

Satz 61 (LAURENT-Zerlegung) $f : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann gibt es eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen $g : B_R(0) \to \mathbb{C}$ und $h : B_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ mit $h(0) = 0$ und

$$f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z}) \qquad (z \in \mathcal{R})$$

Bem. Die Funktion h aus obigem Satz heißt *Hauptteil* und die Funktion g heißt *Nebenteil* von f. Ist

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{und} \qquad h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n,$$

so schreibt man für f auch

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

und nennt diese Reihe die LAURENT-*Reihe* von f.

Satz 62 $f : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und $f(z) := \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ $(z \in \mathcal{R})$ sei die LAURENT-Reihe von f. Dann konvergiert diese Reihe normal auf $\mathcal{R}$ und es gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

mit

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}, \qquad \alpha(t) := \varrho \cdot \exp(2\pi \mathrm{i} t)$$

für ein $\varrho \in (r, R)$ fest.

Satz 63 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ sei holomorph auf D und habe in $a \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität. Dann läßt sich f auf einem Kreisring $B_R(a) \setminus \{a\} \subseteq D$ als LAURENT-Reihe entwickeln:

$$\forall \quad z \in B_R(a) \setminus \{a\} : \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} a \text{ ist hebbar} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, n < 0 : \quad a_n = 0 \\ a \text{ ist außerwesentlich} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}\ \forall\, n < k : \quad a_n = 0 \\ a \text{ ist wesentlich} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\ \exists\, n < k : \quad a_n \neq 0. \end{aligned}$$

Bsp.

- Betrachte

$$f : \mathbb{C} \setminus \{2\pi \mathrm{i} k : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \frac{z}{\exp z - 1}.$$

Die Singularität in $a = 0$ ist hebbar. Es gilt

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

wobei B_n die n-te BERNOULLI-Zahl bezeichnet (vgl. S. 26). In $a = 2\pi \mathrm{i} k$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) hat f einen Pol erster Ordnung. Es gilt:

$$\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = \lim_{z \to a} \frac{z - a}{\exp(z - a) - 1} \cdot z = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\exp z - 1} \cdot (z + a) = a.$$

Damit gibt es eine auf $B_{\frac{1}{2}}(0)$ holomorphe Funktion g mit

$$f(a + z) = a \cdot \frac{1}{z} + g(z)$$

- Zu $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{C}^{\times} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \exp \frac{1}{z^k}.$$

f hat in $a = 0$ stets eine wesentliche Singularität, denn

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-kn}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \notin \{-km, m \in \mathbb{N}_0\} \\ \frac{1}{n!} & n = -km \ (m \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

- Es sei $S := \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Im} z < b\}$. $f : S \to \mathbb{C}$ sei auf S holomorph und es gelte

$$\forall \quad z \in S : \qquad f(z + 1) = f(z)$$

(d.h. f ist *periodisch*) Weiter sei

$$\varphi : S \to \mathbb{C}, \qquad \varphi(z) := \exp(2\pi \mathrm{i} z).$$

φ bildet S auf das Ringgebiet

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : \exp(-2\pi b) < |z| < \exp(-2\pi a)\}$$

ab. Auf $\mathcal{R}$ wird dann durch $g(\varphi(z)) := f(z)$ eine holomorphe Funktion definiert. Wir entwickeln g als LAURENT-Reihe:

$$g(\varphi(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi(z)^n.$$

Mit $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\alpha(t) := \varrho \cdot \exp(2\pi \mathrm{i} t)$ für ein festes $\varrho := \mathrm{e}^{2\pi y} \in (\mathrm{e}^{2\pi b}, \mathrm{e}^{2\pi a})$ ergibt sich

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\alpha \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \int_0^1 \frac{g(\varrho \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x})}{\varrho^n \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n x}} dx = \int_0^1 f(x + \mathrm{i}y) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n (x + \mathrm{i} y)} dx.$$

Damit ergibt sich als Darstellung von f die FOURIER-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n z}.$$

Diese Reihe konvergiert normal auf S.

16 Meromorphe Funktionen

Bem. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von f, dann gilt: a ist genau dann außerwesentlich, wenn $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$ existiert.

Def. 32 Eine Menge $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ heißt *offen*, wenn $U \cap \mathbb{C}$ offen in $\mathbb{C}$ ist und im Fall $\infty \in U$ zusätzlich gilt

$$\exists \quad R > 0 : \qquad \mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)} \subseteq U.$$

Bem. Mit der obigen Definition wird $\hat{\mathbb{C}}$ zu einem topologischen Raum.

Def. 33 Sei $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ offen und $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ eine Funktion, für die die Menge $f^{-1}(\infty) \subseteq U$ diskret ist (d.h. $f^{-1}(\infty)$ hat keinen Häufungspunkt und zu jedem $z \in f^{-1}(\infty)$ gibt es eine Umgebung $V \subseteq U$ derart, daß $V \cap f^{-1}(\infty) = \{z\}$ gilt). Weiter sei f auf $U \setminus f^{-1}(\infty)$ holomorph und die Elemente von $f^{-1}(\infty)$ seien gerade die Polstellen von f. Dann heißt f *meromorph*.

Sei $g(z) := f(\frac{1}{z})$. f heißt *holomorph* in ∞, wenn g in 0 holomorph ist und ∞ heißt *Pol* von f, falls g in 0 einen Pol hat.

Bsp. Sind g und h Polynome, $h \neq 0$, so ist $f := \frac{g}{h}$ meromorph auf $\hat{\mathbb{C}}$. Die Funktion exp ist nicht meromorph nach $\hat{\mathbb{C}}$ fortsetzbar, da $z \mapsto \exp \frac{1}{z}$ in 0 eine wesentliche Singularität hat.

Satz 64 Ist $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ zusammenhängend und offen, so ist die Menge aller auf U meromorphen Funktionen ein Körper.

Bsp. Die Menge aller auf $\hat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktionen ist gleich der Menge $\mathbb{C}(z)$ aller rationalen Funktionen in z.

17 Der Residuensatz

Def. 34 Es sei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine Kurve und $z \in \mathbb{C} \setminus \alpha([0,1])$. Dann heißt

$$\chi(\alpha, z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

die *Umlaufzahl* von α um z. Ist $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve, so heißt

$$\operatorname{int}(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \alpha([0,1]) : \chi(\alpha, z) \neq 0\}$$

das *Innere* und $\operatorname{ext}(\alpha) := \mathbb{C} \setminus \operatorname{int}(\alpha)$ das *Äußere* von α.

Bem.

- Seien $r : [0,1] \to (0, \infty)$ und $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und es gelte $r(0) = r(1)$. Weiter sei

  $$\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}, \qquad \alpha(t) := r(t) \cdot \exp(2\pi \mathrm{i} \varphi(t)).$$

  Dann gilt $\chi(\alpha, 0) = \varphi(1) - \varphi(0)$.

- Ist α eine geschlossene Kurve, so gilt $\chi(\alpha, z) \in \mathbb{Z}$.

Def. 35 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. $a \subseteq \mathbb{C} \setminus D$ sei eine isolierte Singularität von f und

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

sei die LAURENT-Entwicklung von f um a. Dann heißt

$$\operatorname{Res}(f, a) := c_{-1}$$

das *Residuum* von f in a.

Bem. f hat in $B_r(a) \setminus \{a\}$ $(r > 0)$ genau dann eine Stammfunktion, wenn gilt $\operatorname{Res}(f, a) = 0$.

Satz 65 Es seien f und g zwei auf $B_r(a) \setminus \{a\}$ holomorphe Funktionen, die beide in a eine außerwesentliche Singularität haben.

1. Ist $\operatorname{ord}_a(f) = -k$ und $\tilde{f}(z) = (z-a)^k \cdot f(z)$, so gilt

   $$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{\tilde{f}^{(k)}(a)}{(k-1)!}.$$

2. Ist $\operatorname{ord}_a(f) \geq 0$ und $\operatorname{ord}_a(g) = 1$, so ist $\operatorname{ord}_a(\frac{f}{g}) \geq -1$ und es gilt

   $$\operatorname{Res}(\frac{f}{g}, a) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

3. Ist $f \neq 0$, so gilt $\mathrm{Res}(\frac{f'}{f}, a) = \mathrm{ord}_a(f)$. Ist zusätzlich $\mathrm{ord}_a(g) \geq 0$, so gilt

$$\mathrm{Res}(\frac{f'g}{f}, a) = g(a)\,\mathrm{ord}_a f.$$

Satz 66 (Residuensatz) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $z_0, \ldots, z_k \in D$ seien paarweise verschieden. Die Funktion $f : D \setminus \{z_0, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und $\alpha : [0,1] \to D \setminus \{z_0, \ldots, z_k\}$ sei eine geschlossene Kurve. Dann gilt:

$$\int_\alpha f(\zeta)d\zeta = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=0}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j) \cdot \chi(\alpha, z_j).$$

Bem. Der Residuensatz ist eine Verallgemeinerung von Cauchys Integralsatz. Ist f auf D holomorph fortsetzbar, so verschwinden alle Residuen und damit auch das Integral. Allgemeiner: Sind alle Residuen Null, so verschwindet jedes Integral längs einer geschlossenen Kurve in $D \setminus \{z_0, z_1, \ldots, z_d\}$, also hat f dort eine Stammfunktion.

Der Residuensatz impliziert auch Cauchys Integralformel: Ist f auf D holomorph, so gilt für jede geschlossene Kurve α in $D \setminus \{z\}$:

$$2\pi \mathrm{i} f(z) \cdot \chi(\alpha, z) = \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

denn $\mathrm{Res}(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, z) = f(z)$.

18 Anwendungen des Residuensatzes

Satz 67 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, f meromorph auf D. $a_0, \ldots, a_n$ seien die Polstellen und $a_{n+1}, \ldots, a_m$ die Nullstellen von f auf D. Auf $D \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$ sei f holomorph. α sei eine geschlossene Kurve in $D \setminus \{a_0, \ldots, a_m\}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\alpha \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ord}_{a_k}(f) \cdot \chi(\alpha, a_k).$$

Bem. Ist zusätzlich g eine auf D holomorphe Funktion, so gilt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\alpha \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} g(\zeta) d\zeta = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ord}_{a_k}(f) \cdot \chi(\alpha, a_k) \cdot g(a_k).$$

Satz 68 (Satz von Hurwitz) Sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$, die lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt:

1. Hat keine Funktion f_n $(n \in \mathbb{N})$ eine Nullstelle auf D, so ist f entweder konstant Null oder f hat auch keine Nullstelle in D.

2. Ist jede Funktion f_n $(n \in \mathbb{N})$ injektiv, so ist f entweder konstant oder auch injektiv.

Satz 69 (Satz von ROUCHE) $D \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Elementargebiet und $f, g : D \to \mathbb{C}$ seien holomorph. $\alpha : [0,1] \to D$ sei eine geschlossene Kurve, für die alle Umlaufzahlen entweder 1 oder 0 sind. Weiter gelte $|f| > |g|$ auf $\alpha([0,1])$. Dann gilt: f und $f+g$ haben auf $\mathrm{int}(\alpha)$ die gleiche Anzahl von Nullstellen.

Satz 70 Seien $P, Q \in \mathbb{C}[x,y]$ derart, daß für $(x,y) \in \partial\mathbb{E}$ gilt $Q(x,y) \neq 0$. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)} dt = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a \in B_1(0)} \mathrm{Res}(f, a),$$

wobei

$$f : B_1(0) \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \frac{1}{\mathrm{i}z} \cdot \frac{P(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\frac{1}{z}))}{Q(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\frac{1}{z}))}$$

Satz 71 Seien $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ mit $\mathrm{Grad}\, Q \geq \mathrm{Grad}\, P + 2$. In $\mathbb{R}$ habe Q keine Nullstellen. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi\mathrm{i} \sum_{a \in \mathbb{H}} \mathrm{Res}(\frac{P}{Q}, a).$$

Satz 72 (Partialbruchzerlegung des Kotangens) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Diese Reihe konvergiert normal.

Bsp. Wir betrachten die RIEMANNsche ζ-Funktion von Seite 24 und wollen für $k \in \mathbb{N}$ einen geschlossenen Ausdruck für $\zeta(2k)$ angeben. Es gilt

$$\begin{aligned} z \cdot \cot z &= z\mathrm{i} \frac{\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)}{\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)} = \mathrm{i}z \frac{\exp(2\mathrm{i}z) + 1 + 1 - 1}{\exp(2\mathrm{i}z) - 1} \\ &= \frac{2\mathrm{i}z}{\exp(2\mathrm{i}z) - 1} + \mathrm{i}z = \mathrm{i}z + 1 \underbrace{-\frac{1}{2}}_{=B_1} \cdot 2\mathrm{i}z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2\mathrm{i}z)^{2n}. \end{aligned}$$

Für betragsmäßig kleine z gilt damit

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}\pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k} \cdot z^{2k}.$$

Mit

$$\begin{aligned} \pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - n^2} &= 1 + 2z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{n}\right)^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^2}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^{2k}\right) \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^{2k} \zeta(2k). \end{aligned}$$

folgt durch Koeffizientenvergleich:

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k} \in \mathbb{Q} \cdot \pi^{2k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Insbesondere gilt also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

19 Die Gammafunktion

Satz 73 Auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ wird durch

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt$$

eine holomorphe Funktion definiert. Für ihre Ableitungsfunktionen gilt

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^\infty t^{k-1} \log^k t \exp(-t) dt.$$

Satz 74 Die Funktion Γ läßt sich meromorph so nach $\hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen, daß die Polstellen von Γ genau die Zahlen $\{-n, n \in \mathbb{N}_0\}$ sind. Alle Pole sind einfach und es gilt

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

sowie die *Funktionalgleichung der Gammafunktion*:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Bem. Insbesondere gilt $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n \in \mathbb{N})$.

Satz 75 (Satz von Wieland) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das den Vertikalstreifen

$$V := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z < 2\}$$

umfaßt. $f : D \to \mathbb{C}$ sei holomorph und es gelte

1. f ist auf V beschränkt.
2. $\forall \quad z \in D, z+1 \in D : \qquad f(z+1) = zf(z)$.
3. $f(1) = 1$.

Dann gilt $f = \Gamma|_D$.

Satz 76 Es gilt

1. $\forall \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} : \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
3. $\forall \quad z \in \mathbb{C} : \qquad \Gamma(z) \neq 0$.
4. $\forall \quad z \in \mathbb{C} : \qquad \Gamma(\frac{z}{2}) \cdot \Gamma(\frac{z-1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}} \cdot \Gamma(z)$ (Legendre-Relation)

20 Zur RIEMANNschen Zeta-Funktion

Ziel dieses Abschnitts ist die Fortsetzung von ζ auf ein möglichst großes Gebiet.

Def. 36 Die Funktion

$$\vartheta : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \qquad \vartheta(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} n^2 z}$$

heißt *Theta-Funktion*.

Bem. ϑ ist holomorph.

Satz 77 Sei $z \mapsto \sqrt{\frac{z}{\mathrm{i}}}$ die eindeutig bestimmte holomorphe Funktion f auf $\mathbb{H}$, für die gilt $f(z)^2 = \frac{z}{\mathrm{i}}$ und $f(\mathrm{i}y) > 0$ für $y > 0$. Dann gilt

$$\forall \quad z \in \mathbb{H} : \qquad \vartheta(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{\mathrm{i}}}\vartheta(z)$$

Satz 78 ζ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortsetzbar. Der Pol in 1 ist einfach und es ist $\mathrm{Res}(\zeta, 1) = 1$. Weiter gilt

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad \zeta(-2n) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bem. Für $\mathrm{Re}\, s \notin (0,1)$ hat ζ nur die Nullstellen $-2n$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gibt jedoch weitere Nullstellen im *kritischen Streifen*

$$S := \{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}\, s \leq 1\}$$

Die RIEMANN*sche Vermutung* besagt, daß alle Nullstellen von ζ in S auf der Geraden mit $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ liegen. Diese Aussage konnte bisher weder bewiesen noch wiederlegt werden.

21 Elliptische Funktionen

In diesem Abschnitt seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^\times$ mit $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$ und

$$\Lambda := \{m_1 w_1 + m_2 w_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

$(\Lambda, +)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{C}, +)$ und heißt *Gitter*. Zu $u \in \mathbb{C}$ heißt

$$P(w_1, w_1, u) := \{u + a_1 w_1 + a_2 w_2 : a_1, a_2 \in [0,1)\}$$

ein *Parallelogramm* von Λ.

Def. 37 Es sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. f heißt *elliptisch* bezüglich Λ, falls gilt

$$\forall \quad \lambda \in \Lambda : \qquad f(z + \lambda) = f(z).$$

Es sei

$$K_\Lambda := \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ ist elliptisch bzgl. } \Lambda\}$$

Bem.

- Für $u \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ gibt es genau ein $\lambda \in \Lambda$ mit
$$z - \lambda \in P(w_1, w_2, u).$$
- Hat $f \in K_\Lambda$ keinen Pol, so ist f konstant. (Erster Satz von LIOUVILLE)

Satz 79 (Zweiter Satz von LIOUVILLE) Sei $f \in K_\Lambda$ und P ein Parallelogramm von Λ. Dann gilt
$$\sum_{c \in P} \operatorname{Res}(f, c) = 0.$$

Satz 80 Ist $f \in K_\Lambda$ nicht konstant und $w \in \mathbb{C}$, so gilt
$$\sum_{c \in P} \operatorname{ord}_c(f - w) = 0$$
Insbesondere ist w ein Funktionswert von f.

Satz 81 Ist $0 \neq f \in K_\Lambda$, so gilt $\sum\limits_{c \in P} \operatorname{ord}_c(f) \cdot c \in \Lambda$.

Satz 82 Die Reihe
$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq 0}} \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$
konvergiert auf $\mathbb{C} \backslash \Lambda$ lokal gleichmäßig. Durch $\wp$ wird eine meromorphe Funktion auf $\hat{\mathbb{C}}$ definiert. Diese ist Λ-elliptisch und gerade. In Λ liegen Pole zweiter Ordnung mit Residuum 0 vor und an der Stelle 0 hat $\wp$ eine LAURENT-Entwicklung der Form
$$\wp(z) = z^{-2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots$$

Bem. Die Funktion $\wp$ heißt WEIERSTRASS*sche* $\wp$*-Funktion* zum Gitter Λ.

Satz 83 In $P = P(w_1, w_2, 0)$ hat $\wp'$ genau drei Nullstellen. Diese liegen bei $\frac{w_1}{2}$, $\frac{w_2}{2}$ und $\frac{w_1 + w_2}{2}$ und sind einfach.

Satz 84 Für $w \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\wp(\frac{w_1}{2}), \wp(\frac{w_2}{2}), \wp(\frac{w_1 + w_2}{2})\}$ gibt es in einem Parallelogramm P genau zwei Punkte $u \neq v$ mit $\wp(u) = \wp(v) = w$.

Satz 85 Seien $e_1 := \wp(\frac{w_1}{2}), e_2 := \wp(\frac{w_2}{2})$ und $e_3 := \wp(\frac{w_1 + w_2}{2})$. Dann gilt
$$(\wp')^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

Satz 86

1. Die geraden elliptischen Funktionen sind genau die rationalen Funktionen in $\wp$, also von der Gestalt
$$\frac{a_m \wp^m + a_{m-1} \wp^{m-1} + \cdots + a_1 \wp + a_0}{b_n \wp^n + b_{n-1} \wp^{n-1} + \cdots + b_1 \wp + b_0}.$$
Die Menge $\mathbb{C}(\wp)$ dieser Funktionen bildet einen Teilkörper von K_Λ.
2. Es gilt $K_\Lambda = \mathbb{C}(\wp) \oplus \mathbb{C}(\wp) \cdot \wp'$.

Index