Funktionalanalysis II

Manuel Kauers
nach einer Vorlesung von
Dr. C. Schmöger

11. August 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitungen **1**

2 Dualität, Operatoren mit abgeschlossenem Bildraum **3**

3 Banach-Algebren und Spektraltheorie **7**

4 Kompakte Operatoren **13**

5 Unbeschränkte Operatoren **16**

6 Halbgruppen **18**

7 Vektorwertige holomorphe Funktionen **25**

8 Der Dunfordsche Funktionalkalkül **29**

9 Kompakte Operatoren auf Hilbert-Räumen **31**

10 Symmetrische Operatoren **32**

11 Der Funktionalkalkül für symmetrische Operatoren **33**

1 Vorbereitungen

Def. 1 X, Y seien normierte Räume, beide reell oder beide komplex.

1. $L(X, Y)$ bezeichnet die Menge aller linearen und stetigen Abbildungen von X nach Y; $L(X) := L(X, X)$; $X' := L(X, \mathbb{K})$.
2. Die kleinste Zahl $q \geq 0$, für die
$$||Ax|| \leq q||x|| \qquad (x \in X)$$
gilt, heißt *Operatornorm*, Schreibweise $q = ||A||$.

Bem.

- Für lineare Abbildungen $A : X \to Y$ sind folgende Aussagen äquivalent:
  - $A \in L(X, Y)$,
  - A ist beschränkt,
  - $\exists \quad q \geq 0 \quad \forall \quad x \in X: \qquad ||Ax|| \leq q||x||$.
- Es gilt
$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||.$$
- Statt $x'(x)$ schreibt man $\langle x, x' \rangle$ $(x \in X')$. Es gelten
$$||x'|| = \sup_{||x|| \leq 1} |\langle x, x' \rangle|, \qquad ||x|| = \sup_{||x'|| \leq 1} |\langle x, x' \rangle|.$$

Satz 1 Seien X, Y normierte Räume, Y ein BANACH-Raum. Dann ist $L(X, Y)$ ein BANACH-Raum.

Satz 2 Seien X und Y normierte Räume und $A \in L(X, Y)$. dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist injektiv und $A^{-1} : A(X) \to X$ ist stetig
2. $\exists \quad m > 0 \quad \forall \quad x \in X: \qquad m||x|| \leq ||Ax||$

Satz 3 Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:

1. Für $x' \in X$ mit $\langle x, x' \rangle = 0$ $(x \in X)$ gilt $x' = 0'$.
2. Für $x \in X$ mit $x'(x) = 0$ $(x' \in X')$ gilt $x = 0$.

Satz 4 Sei X ein normierter Raum, U ein abgeschlossener Unterraum von X, $x_0 \notin U$ und $\delta = \inf_{x \in U} ||x - x_0||$. Dann existiert ein $x' \in X'$ mit $||x'|| = 1$, $x'(x_0) = \delta$ und $x'(x) = 0$ $(x \in U)$.

Def. 2 Sei X ein normierter Raum. Dann heißt $X'' := (X')'$ der *Bidualraum* von X.

Bem. Sei $x \in X$ und
$$F_x : X' \to \mathbb{K}, \qquad F_x(x') = x'(x).$$
Dann ist $F_x \in X''$ und $||F_x|| = ||x||$. Jedes $x \in X$ kann also als Element von X'' aufgefaßt werden. Sei
$$J_x : X \to X'', \qquad J_x(x) = F_x.$$
Dann ist J_x linear und es gilt $||J_x(x)|| = ||x||$. X kann als Unterraum von X'' aufgefaßt werden. X heißt *reflexiv*, falls $J_x(X) = X''$. Ist X reflexiv, so ist X ein BANACH-Raum.

Satz 5 Sei X ein normierter Raum und $M \subseteq X$. Dann gilt: M ist genau dann beschränkt, wenn $x'(M)$ beschränkt ist $(x' \in X')$.

2 Dualität, Operatoren mit abgeschlossenem Bildraum

In diesem Abschnitt seien X, Y normierte Räume.

Def. 3 Zu $S \subseteq X$ und $T \subseteq X'$ seien

$$\begin{aligned} S^{\perp} &:= \{x' \in X' : x'(x) = 0 \ (x \in S)\} \subseteq X' \\ {}^{\perp}T &:= \{x \in X : x'(x) = 0 \ (x' \in T)\} \subseteq X. \end{aligned}$$

Bsp. $X^{\perp} = \{0'\}, {}^{\perp}(X^{\perp}) = X, {}^{\perp}X' = \{0\}$.

Satz 6 Seien $S, S_1, S_2 \subseteq X$, $T, T_1, T_2 \subseteq X'$, $M = \overline{[S]}$ und U sei ein Unterraum von X. Dann gelten:

1. $S \subseteq {}^{\perp}(S^{\perp})$, aus $S_1 \subseteq S_2$ folgt $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$, aus $T_1 \subseteq T_2$ folgt ${}^{\perp}T_2 \subseteq {}^{\perp}T_1$.
2. $S^{\perp}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von X', ${}^{\perp}T$ ist ein abgeschlossener Unterraum von X.
3. U ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt $U = {}^{\perp}(U^{\perp})$.
4. $M^{\perp} = S^{\perp}$, $M = {}^{\perp}(S^{\perp})$.

Satz 7 Es sei $A \in L(X, Y)$. Dann existiert genau ein $A' \in L(Y', X')$ mit der Eigenschaft

$$\langle Ax, y' \rangle = \langle x, A'y' \rangle \qquad (x \in X, y' \in Y').$$

Es gilt $||A'|| = ||A||$.

Bem. Der Operator A' aus obigem Satz heißt die zu A gehörige *Adjungierte* oder *Konjungierte*.

Satz 8 Sei Z ein weiterer normierter Raum, $A, B \in L(X, Y)$, $C \in L(Z, X)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gelten:

1. $(A + B)' = A' + B'$, $(\alpha A)' = \alpha(A')$, $(AC)' = C'A'$.
2. $0'_X = 0_{X'}$, $\mathrm{id}'_X = \mathrm{id}_{X'}$.
3. $\mathrm{Kern}(A) = {}^{\perp}(A'(Y'))$, $\mathrm{Kern}(A') = A(X)^{\perp}$, $\overline{A(X)} = {}^{\perp}\mathrm{Kern}(A')$, $\overline{A'(Y')} \subseteq \mathrm{Kern}(A)^{\perp}$.
4. $A(X)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt $A(X) = {}^{\perp}\mathrm{Kern}(A')$.

Satz 9 (Satz von der stetigen Inversen) X und Y seien BANACH-Räume und $A \in L(X, Y)$ sei bijektiv. Dann ist A^{-1} stetig.

Satz 10 Seien X, Y BANACH-Räume und $A \in L(X, Y)$ bijektiv. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A^{-1} ist stetig.
2. $\exists \quad m > 0 \quad \forall \quad x \in X : \qquad m||x|| \leq ||Ax||$.

3. $A(X)$ ist abgeschlossen.

Bem.

- Sei U ein abgeschlossener Unterraum von X, $\hat{X} = {}^{X}/_{U}$. Dann werden die Elemente von $\hat{X}$ in der Form $\hat{x}$ notiert, also etwa $\hat{x} = x + U$ $(x \in X \setminus U)$.
- $\hat{X}$ ist mit der Norm

$$||\hat{x}|| = \inf_{z \in \hat{X}} ||z|| = \inf_{u \in U} ||x - u|| =: d(x, U)$$

ein normierter Raum. Ist X ein Banach-Raum, dann auch $\hat{X}$.

- Sei $A \in L(X,Y)$ und $U = \text{Kern}(A)$. $\hat{A} : \hat{X} \to Y$ sei definiert durch $\hat{A}\hat{X} := Ax$. $\hat{A}$ ist linear, surjektiv, und es gilt $\hat{A}(\hat{X}) = A(X)$. $\hat{A}$ heißt die zu A gehörende *kanonische Injektion*.

Satz 11 Seien X, Y normierte Räume und $A \in L(X,Y)$. Dann gelten:

1. $\hat{A}$ ist stetig, $||\hat{A}|| = ||A||$,
2. A ist genau dann offen, wenn $\hat{A}$ offen ist,
3. Sind X, Y Banach-Räume, so ist $A(X)$ genau dann abgeschlossen, wenn A offen ist.

Def. 4 Zu $A \in L(X,Y)$ heißt

$$\gamma(A) := \begin{cases} \inf\limits_{x \notin \text{Kern}(A)} \frac{||Ax||}{d(x, \text{Kern}(A))} & A \neq 0, \\ \infty & A = 0 \end{cases}$$

der *Minimalmodul* von A.

Satz 12 Seien X und Y Banach-Räume und $A \in L(X,Y)$. Dann gilt: $A(X)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\gamma(A) > 0$ ist.

Satz 13 Seien X, Y Banach-Räume, $A \in L(X,Y)$. Z sei ein abgeschlossener Unterraum von Y mit $A(X) \cap Z = \{0\}$ und $A(X) \oplus Z$ sei abgeschlossen. Dann ist $A(X)$ abgeschlossen.

Def. 5 Sei V ein Vektorraum, U, W Untervektorräume von V mit $V = U \oplus W$. Dann heißt $\text{co-dim}\, W := \dim U$ die *Kodimension* von W.

Bem. Es gilt $\text{co-dim}\, W = \dim {}^{V}/_{W}$.

Satz 14 (Satz von Kato) X und Y seien Banach-Räume, es sei $A \in L(X,Y)$ und $\text{co-dim}\, A(X) < \infty$. Dann ist $A(X)$ abgeschlossen.

Satz 15 X sei ein Banach-Raum, Y ein normierter Raum, $A \in L(X,Y)$. Zu $r > 0, \varrho > 0$ seien

$$K_r = \{x \in X : ||x|| \leq r\}, \qquad U_\varrho = \{y \in Y : ||y|| < \varrho\}.$$

Weiter gelte $U_\varrho \subseteq \overline{A(K_1)}$. Dann ist A surjektiv.

Satz 16 X und Y seien BANACH-Räume und $A \in L(X,Y)$. Dann gilt: A ist genau dann surjektiv, wenn A' surjektiv und $(A')^{-1}$ stetig ist.

Bem.

- Zu $A \in L(X,Y)$ sei $A'' := (A')' \in L(X'',Y'')$.
- Faßt man X als Unterraum von X'' auf, so gilt $A''|_X = A$.

Satz 17 X und Y seien normierte Räume und $A \in L(X,Y)$. Dann gilt: A' ist genau dann surjektiv, wenn A injektiv ist und A^{-1} stetig.

Satz 18 X und Y seien BANACH-Räume und $A \in L(X,Y)$. Dann gilt: $A(X)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $A'(Y')$ abgeschlossen ist. In diesem Fall ist $A(X) = {}^{\perp}\,\mathrm{Kern}(A'), A'(Y') = \mathrm{Kern}(A)^{\perp}$.

Def. 6 Für einen BANACH-Raum X sei

$$L(X)^{-1} := \{A \in L(X) : A \text{ ist bijektiv}\}.$$

Bem. Es gilt $L(X)^{-1} = \{A \in L(X) : \exists\, B \in L(X) : \ AB = \mathrm{id} = BA\}$.

Satz 19 Seien X, Y BANACH-Räume und $A \in L(X,Y)$. Dann gelten:

1. A ist genau dann bijektiv, wenn A' bijektiv ist. In diesem Fall gilt $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.
2. Im Fall $X = Y$ gilt
$$A \in L(X)^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad A' \in L(X')^{-1}.$$

Bem. Wir betrachten Operatoren, die nicht auf ganz X definiert sind. Im folgenden sei $D(A)$ ein Unterraum von X und $A : D(A) \to Y$ linear. Es gelten folgende Bezeichnungen:

- $\mathrm{graph}(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$,
- A heißt *abgeschlossen*, wenn für jede Folge (x_n) in $D(A)$ mit
$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in X \quad \text{und} \quad Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} y \in Y$$
gilt $x \in D(A)$ und $Ax = y$.

Jeder Operator in $L(X,Y)$ ist abgeschlossen. Ist $A : D(A) \to Y$ abgeschlossen, so ist auch $\mathrm{Kern}(A)$ abgeschlossen.

Satz 20 X und Y seien BANACH-Räume. Es gilt:

1. Ist $A : D(A) \to Y$ abgeschlossen, so ist $D(A)$ versehen mit der *Graphennorm*
$$||x||_A := ||x|| + ||Ax|| \qquad (x \in X)$$
ein BANACH-Raum.
2. (Satz vom abgeschlossenen Graphen) Ist $B : X \to Y$ linear, so gilt B ist genau dann abgeschlossen, wenn $B \in L(X,Y)$.

Satz 21 X und Y seien BANACH-Räume und $A : D(A) \to Y$ sei abgeschlossen. Dann gilt:

1. Im Fall $A \neq 0$ ist $A(D(A))$ genau dann abgeschlossen, wenn gilt
$$\inf_{x \in D(A) \setminus \mathrm{Kern}(A)} \frac{||Ax||}{d(x, \mathrm{Kern}(A))} > 0.$$
2. Ist A injektiv und $A(D(A)) = Y$, so ist $A^{-1} \in L(Y, X)$.

Def. 7 H_1, H_2 seien HILBERT-Räume, $A \in L(H_1, H_2)$. Zu $g \in H_2'$ sei z_g der eindeutig bestimmte Punkt in H_2 mit $g(x) = (x, z_g)$ $(x \in H_2)$. Dann ist die *Adjungierte* A^* von A definiert durch
$$A^* : H_2 \to H_1, \qquad A^* z_g := z_{A'g}$$

Bem. A^* ist linear und es gilt
$$(Ax, y) = (x, A^* y) \qquad (x \in H_1, y \in H_2).$$

Satz 22 Seien H_1, H_2, H_3 HILBERT-Räume, $A, B \in L(H_1, H_2)$, $C \in L(H_3, H_1)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

1. $A^* \in L(H_2, H_1)$, $||A^*|| = ||A||$.
2. Ist $\Phi : H_2 \to H_1$ linear und $(Ax, y) = (x, \Phi y)$ $(x \in H_1, y \in H_2)$, so ist $\Phi = A^*$.
3. $A^{**} = (A^*)^* = A$
4. $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, (AC)^* = C^* A^*$,
5. A ist genau dann bijektiv, wenn A^* bijektiv ist. In diesem Fall gilt
$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$
6. $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, $0^* = 0$.
7. $A \in L(H_1)^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad A^* \in L(H_2)^{-1}$.
8. $\overline{A(H_1)} = \mathrm{Kern}(A^*)^{\perp}$, $\overline{A^*(H_2)} = \mathrm{Kern}(A)^{\perp}$,
$\overline{A(H_1)}^{\perp} = \mathrm{Kern}(A^*)$, $\overline{A^*(H_2)}^{\perp} = \mathrm{Kern}(A)$.
9. $A(H_1)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $A^*(H_2)$ abgeschlossen ist.
10. $||A^*A|| = ||AA^*|| = ||A||^2$.

Def. 8 Sei H ein HILBERT-Raum und $A : H \to H$ linear.

1. A heißt *symmetrisch*, falls gilt
$$(Ax, y) = (x, Ay) \qquad (x, y \in H).$$
2. Ist $A \in L(H)$ und gilt $A = A^*$, so heißt A *selbstadjungiert.*

Bem. Für $A \in L(A)$ sind Selbstadjungiertheit und Symmetrie äquivalent.

Satz 23 (Satz von HELLINGER-TÖPLITZ) Ist $A : H \to H$ linear und symmetrisch, so ist $A \in L(H)$.

3 BANACH-Algebren und Spektraltheorie

Def. 9 Sei $\mathfrak{A}$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

1. Ist für je zwei Elemente $a, b \in \mathfrak{A}$ ein rodukt $a \cdot b \in \mathfrak{A}$ definiert mit

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c && (a, b, c \in \mathfrak{A}), \\ a \cdot (\alpha b) &= \alpha (a \cdot b) && (a, b \in \mathfrak{A}, \alpha \in \mathbb{K}), \\ a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c && (a, b, c \in \mathfrak{A}), \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c && (a, b, c \in \mathfrak{A}), \end{aligned}$$

   so heißt $\mathfrak{A}$ eine *Algebra* über $\mathbb{K}$.

2. Ist $\mathfrak{A}$ eine Algebra und mit einer Norm $||\cdot||$ ein normierter Raum, und gilt

$$||a \cdot b|| \leq ||a|| \cdot ||b|| \qquad (a, b \in \mathfrak{A}),$$

   so heißt $\mathfrak{A}$ *normierte* Algebra.

3. Ist $\mathfrak{A}$ eine normierte Algebra, die als normierter Raum vollständig ist, so heißt $\mathfrak{A}$ BANACH-*Algebra*.

Def. 10 Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra.

1. Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathfrak{A}$ sei

$$a^k := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{k \text{ Faktoren}}.$$

2. $e \in \mathfrak{A}$ heißt *Einselement* von $\mathfrak{A}$, falls gilt

$$a \cdot e = e \cdot a = a \qquad (a \in \mathfrak{A}).$$

3. $\mathfrak{A}$ besitze ein Einselement e. Dann sei $a^0 := e$. $a \in \mathfrak{A}$ heißt *invertierbar*, falls gilt

$$\exists \quad b \in \mathfrak{A} : \qquad a \cdot b = b \cdot a = e.$$

   Es sei $\mathfrak{A}^{-1}$ die Menge der invertierbaren Elemente von $\mathfrak{A}$.

Bem.

- Statt $a \cdot b$ schreibt man auch kurz ab.
- Eine Algebra hat höchstens ein Einselement.
- Das eindeutig bestimmte inverse Element zu $a \in \mathfrak{A}$ heißt *Inverse* von a und wird a^{-1} notiert.
- Ist $\mathfrak{A}$ eine normierte Algebra mit Einselement $e \neq 0$, so gilt $||e|| \geq 1$.

Bsp.

- Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann bildet die Menge $\mathfrak{A}$ der linearen Abbildungen von V in sich mit der Komposition als Produkt eine Algebra mit Einselement id. Hier ist $\mathfrak{A}^{-1}$ die Menge der bijektiven linearen Abbildungen von V in sich.

- Sei X ein normierter Raum und $\mathfrak{A} = L(X)$. Dann ist A mit dem Operatorenprodukt und der Operatornorm eine normierte Algebra mit Einselement. Es gilt

  $$\mathfrak{A}^{-1} = \{A \in \mathfrak{A} : A \text{ ist bijektiv und } A^{-1} \text{ ist stetig}\}.$$

  Ist X ein BANACH-Raum, so ist $L(X)$ auch ein BANACH-Raum und es gilt

  $$\mathfrak{A}^{-1} = \{A \in \mathfrak{A} : A \text{ ist bijektiv}\}.$$

Satz 24 Sei $\mathfrak{A}$ eine durch $||\cdot||$ normierte Algebra mit Einselement $e \neq 0$. Dann gibt es auf $\mathfrak{A}$ eine zu $||\cdot||$ äquivalente Norm $||\cdot||$ mit $||e|| = 1$.

Bem. Ab jetzt sei $\mathfrak{A}$ eine normierte Algebra mit Einselement e, und es gelte $e \neq 0$ und $||e|| = 1$.

Satz 25 $(a_n), (b_n)$ seien Folgen in $\mathfrak{A}$ und $a, b \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

1. Aus $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a, b_n \xrightarrow{n\to\infty} b$ folgt $a_n b_n \xrightarrow{n\to\infty} ab$.
2. Es existiert $\lim\limits_{n\to\infty} ||a^n||^{1/n}$ und es gilt

   $$\lim_{n\to\infty} ||a^n||^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} ||a^n||^{1/n} \leq ||a||.$$

3. Sei $\mathfrak{A}$ eine BANACH-Algebra. Ist $\lim\limits_{n\to\infty} ||a^n||^{1/n} < 1$, so ist $e - a \in \mathfrak{A}^{-1}$, die NEUMANN*sche Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ ist konvergent und es gilt

   $$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Satz 26 Sei $\mathfrak{A}$ eine BANACH-Algebra. Dann gilt:

1. Ist $a_0 \in \mathfrak{A}^{-1}$, $a \in \mathfrak{A}$ und $||a - a_0|| < ||a_0^{-1}||^{-1}$, so ist $a \in \mathfrak{A}^{-1}$ und es gilt

   $$||a^{-1} - a_0^{-1}|| \leq \frac{||a_0^{-1}||^2 \cdot ||a - a_0||}{1 - ||a_0^{-1}|| \cdot ||a - a_0||}.$$

   Also ist $\mathfrak{A}^{-1}$ offen und die Abbildung $a \mapsto a^{-1}$ ist auf $\mathfrak{A}^{-1}$ stetig.
2. $\mathfrak{A} \setminus A^{-1}$ ist abgeschlossen.

Def. 11 Sei $\mathfrak{A}$ eine BANACH-Algebra und $x \in \mathfrak{A}$ fest. Dann heißt

$$\varrho(x) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda e - x \in \mathfrak{A}^{-1}\}$$

die *Resolventenmenge* von x.

$$\Gamma_\lambda(x) = (\lambda e - x)^{-1} \qquad (\lambda \in \varrho(x))$$

heißt *Resolvente* von x, $\sigma(x) := \mathbb{K} \setminus \varrho(x)$ heißt das *Spektrum* von x und

$$r(x) := \lim_{n\to\infty} ||x^n||^{1/n}$$

heißt der *Spektralradius* von x.

Satz 27 $\mathfrak{A}$ sei eine BANACH-Algebra und $x \in \mathfrak{A}$.

1. Ist $\lambda_0 \in \varrho(x)$ und $|\lambda - \lambda_0| < ||r_{\lambda_0}(x)||^{-1}$, so ist $\lambda \in \varrho(x)$ und
$$r_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda - \lambda_0)^n r_{\lambda_0}(x)^{n+1}.$$
2. (Resolventengleichung)
$$r_\lambda(x) - r_\mu(x) = -(\lambda - \mu) r_\lambda(x) r_\mu(x) \qquad (\lambda, \mu \in \varrho(x)).$$
3. Ist $|\lambda| > r(x)$, so ist $\lambda \in \varrho(x)$ und
$$r_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$
Es gilt
$$\sigma(x) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq r(x)\}$$
und $\sigma(x)$ ist kompakt. Weiter gilt
$$||r_\lambda(x)|| \xrightarrow{|\lambda| \to \infty} 0.$$
4. Ist $\mathfrak{A}$ komplex, so ist $\sigma(x) \neq \emptyset$ und $r(x) = \max_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$.

Def. 12 Sei $A \in L(X)$. Dann heißt
$$\begin{aligned}\sigma_P(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \operatorname{id} - A \text{ ist nicht injektiv}\}\end{aligned}$$
das *Punktspektrum* von A,
$$\sigma_C(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \notin \sigma_P(A), \lambda \operatorname{id} - A \text{ nicht surjektiv}, \overline{(\lambda \operatorname{id} - A)(X)} = X\}$$
das *kontinuierliche* Spektrum von A.
$$\sigma_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \notin \sigma_P(A), \overline{(\lambda \operatorname{id} - A)(X)} \neq X\}$$
heißt das *Residualspektrum*.

Bsp. $\mathfrak{A}$ sei eine BANACH-Algebra.

- Sei X ein normierter Raum endlicher Dimension. Dann gilt
$$\sigma(A) = \sigma_(A) \qquad (A \in L(X)).$$
- $\sigma(e) = \{1\}, \sigma(0) = \{0\}$.
- $x \in \mathfrak{A}$ heißt *idempotent*, falls gilt $x^2 = x$. Es gilt: Ist $x \in \mathfrak{A}$, $0 \neq x \neq e$ idempotent, so ist $\sigma(x) = \{0, 1\}$.

- $x \in A$ heißt *nilpotent*, falls gilt
$$\exists \quad n \in \mathbb{N}: \qquad x^n = 0.$$
Es gilt: Ist $x \in A$ nilpotent, so ist $\sigma(x) = \{0\}$.

- $x \in \mathfrak{A}$ heißt *quasinilpotent*, wenn gilt $r(x) = 0$. In diesem Fall gilt $s(x) \subseteq \{0\}$. Ist $\mathfrak{A}$ komplex, so gilt: x ist genau dann quasinilpotent, wenn $s(x) = \{0\}$.

- Sei
$$H = l^2 = \{(x_n), x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}.$$
Der *Shiftoperator* $A \in L(H)$ sei definiert durch
$$A(x_1, x_2, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots) \qquad ((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H).$$
Nachrechnen zeigt:
$$\begin{aligned} A^*(x_1, x_2, \dots) &= (x_2, x_3, \dots) \\ A^n(x_1, x_2, \dots) &= (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ Nullen}}, x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$
Damit gilt $||A^n x|| = ||x||$ $(n \in \mathbb{N}, x \in H)$, damit $||A^n|| = 1$, damit $r(A) = 1$ und damit $\sigma(A) \subseteq \bar{\mathbb{D}}$ mit
$$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}.$$
Da A nicht surjektiv ist, gilt $0 \in \sigma(A)$.
Sei $\lambda \in \mathbb{D}$ und $x = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$. Offenbar ist $x \neq 0$ und $x \in H$. Wegen
$$A^* x = (\lambda, \lambda^2, \dots) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2, \dots) = \lambda x$$
gilt $\lambda \in \sigma_P(A^*)$. Also gilt
$$\mathbb{D} \subseteq \sigma_P(A^*) \subseteq \sigma(A^*),$$
und damit $\mathbb{D} \subseteq \sigma(A) \subseteq \bar{\mathbb{D}}$. Aus der Abgeschlossenheit von $\sigma(A)$ folgt $\sigma(A) = \bar{\mathbb{D}}$ und daraus $\sigma(A^*) = \bar{\mathbb{D}}$.
Sei $\lambda \in \sigma_(A^*)$. Dann gilt:
$$\exists \quad x = (x_n) \in H \setminus \{0\}: \qquad A^* x = \lambda x.$$
Für dieses x gilt
$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots),$$
also $\lambda x_n = x_{n+1}$ und somit $x_{n+1} = \lambda^n x_1$. Wegen $x \in H$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ konvergent, also auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{2n}$. Dann aber ist $|\lambda| < 1$, also $\sigma_P(A^*) \subseteq \mathbb{D}$.
Zusammen mit $\mathbb{D} \subseteq \sigma_P(A^*)$ (s. o.) folgt $\mathbb{D} = \sigma_P(A^*)$.
Es gilt $\sigma_P(A) = \emptyset$: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$ und $Ax = \lambda x$. Dann gilt
$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots),$$
also $\lambda x_1 = 0, \lambda x_2 = x_1, \dots$. Hieraus folgt $x = 0$, also $\lambda \notin \sigma_P(A)$.

Def. 13 $A \in L(H)$ heißt *normal*, falls gilt

$$AA^* = A^*A.$$

Satz 28 Sei $A \in L(H)$ normal. Dann gelten:

1. $||Ax|| = ||A^*x||$ $(x \in H)$. Insbesondere gilt $\text{Kern}(A) = \text{Kern}(A^*)$ und $H = \overline{A(H)} \oplus \text{Kern}(A)$.

2. $\lambda \, \text{id} - A$ $(\lambda \in \mathbb{K})$ und A^n $(n \in \mathbb{N})$ sind normal.

3. $||A|| = r(A)$.

4. $\sigma_r(A) = \emptyset$.

5. Ist A symmetrisch, so gilt $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Satz 29 (Satz von Gelfand-Masur) $\mathfrak{A}$ sei eine komplexe Banach-Algebra mit Einselement e. $\mathfrak{A}$ sei eine *Divisionsalgebra*, d. h. $\mathfrak{A} \setminus \{0\} \subseteq \mathfrak{A}^{-1}$. Dann gilt $\mathfrak{A} = [e]$.

Bsp. Sei $H = l^2$ und A der Shiftoperator. Dann gilt $A^*A = \text{id}$, und damit $\sigma(A^*A) = \{1\}$. Sei $B := AA^*$. Dann ist

$$B^2 = (AA^*)(AA^*) = A(A^*A)A^* = AA^* = B,$$

B ist also idempotent. Weiter gilt $B \neq \text{id}$ (sonst wäre $AA^* = \text{id} = A^*A$, also $0 \in \varrho(A)$, Widerspruch!) und $B \neq 0$ (sonst wäre $0 = BA = AA * A = A$, Widerspruch!). Mit dem Beispiel von oben erhält man $\sigma(AA^*) = \{0, 1\}$.

Satz 30 Sei $\mathfrak{A}$ eine Banach-Algebra mit Einselement, $x, y \in \mathfrak{A}$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gelten:

1. $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$,

2. $r(xy) = r(yx)$,

3. $r(x^m) = r(x)^m$.

Bem. Sei $\mathfrak{A}$ eine Banach-Algebra mit Einselement e und $a \in \mathfrak{A}$.

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

sei eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $r > 0$. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{||a_n x^n||} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot ||x^n||^{1/n} = \frac{r(x)}{r}.$$

Ist also $r(x) < r$, so konvergiert die Reihe $f(x)$ in $\mathfrak{A}$.

Bsp. Analog zum reellen und komplexen läßt sich auf $\mathfrak{A}$ die *Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}, \qquad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

definieren. Statt

Satz 31 Sei $f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann gilt:

1. Ist X ein BANACH-Raum, $A \in L(X)$ und $r(A) < r$ (also $r(A') < r$), so gilt
$$f(A') = (f(A))'.$$

2. Ist H ein HILBERT-Raum, $A \in L(H)$ und $r(A) < r$ (also $r(A^*) < r$), so gilt
$$(f(A))^* = \tilde{f}(A^*),$$
wobei $\tilde{f}(\lambda) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \lambda^n$.

3. Sei $\mathfrak{A}$ eine BANACH-Algebra mit Einselement e, $x, y \in \mathfrak{A}$ und $xy = yx$. Dann gilt
$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$
und im Fall $\exp(x) \in \mathfrak{A}^{-1}$ gilt $(\exp(x))^{-1} = \exp(-x)$.

Satz 32 Z sei ein normierter Raum und U ein abgeschlossener Unterraum von Z. Dann gilt:

1. $\left({}^{Z}/_{U} \right)'$ ist normisomorph zu $U^{\perp}$.
2. ${}^{Z'}/_{U'}$ ist normisomorph zu U'.
3. $\dim Z = \dim Z'$.

Def. 14 Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $A : V \to W$ linear. Dann heißt
$$\alpha(A) := \dim \operatorname{Kern}(A)$$
der *Nulldefekt* von A und
$$\beta(A) := \text{co-}\dim A(V)$$
der *Bilddefekt* von A.

Bsp.

- Sei X ein BANACH-Raum und $a \in L(X)$. Dann gilt
$$\begin{aligned} \varrho(A) &= \{\lambda \in \mathbb{K} : \alpha(\lambda \operatorname{id} - A) = \beta(\lambda \operatorname{id} - A) = 0\} \\ \sigma(A) &= \{\lambda \in \mathbb{K} : \alpha(\lambda \operatorname{id} - A) > 0\}. \end{aligned}$$
- Ist $H = l^2$ und A der Shiftoperator, so gilt $\alpha(A) = 0$, $\beta(A) = 1$, $\alpha(A^*) = 1$ und $\beta(A^*) = 0$.

Satz 33

1. Sei X ein BANACH-Raum, $A \in L(X)$ und $A(X)$ abgeschlossen. Dann gilt $\alpha(A') = \beta(A)$, $\beta(A') = \alpha(A)$.
2. Sei H ein HILBERT-Raum, $A \in L(H)$ und $A(H)$ abgeschlossen. Dann gilt $\alpha(A^*) = \beta(A)$, $\beta(A^*) = \alpha(A)$.

4 Kompakte Operatoren

In diesem Abschnitt seien X, Y BANACH-Räume.

Def. 15 Sei $K : X \to Y$ linear. Für jede beschränkte Folge (x_n) in X enthalte (Kx_n) eine konvergente Teilfolge. Dann heißt K *kompakt*. Es sei $\mathcal{K}(X, Y)$ die Menge aller kompakten Operatoren von X nach Y; $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X, X)$. Ferner seien

$$\mathcal{F}(X, Y) := \{A \in L(X, Y) : \dim A(X) < \infty\}, \qquad \mathcal{F}(X) := \mathcal{F}(X, X).$$

Satz 34 $\mathcal{F}(X, Y) \subseteq \mathcal{K}(X, Y) \subseteq L(X, Y)$.

Def. 16 Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra und $J \subseteq \mathfrak{A}$ mit

$$\forall \quad a \in \mathfrak{A}, x \in J : \qquad a \cdot x, x \cdot a \in J.$$

Dann heißt J *Ideal* in $\mathfrak{A}$.

Bem.

- $\mathcal{F}(X)$ ist ein Ideal in $L(X)$.
- Ist $\dim X < \infty$, so gilt

$$\mathcal{F}(X) = \mathcal{K}(X) = L(X).$$

Satz 35

1. $\mathcal{K}(X, Y)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $L(X, Y)$.
2. $\mathcal{K}(X, Y)$ ist ein abgeschlossenes Ideal in $L(X)$.
3. Sei $K \in \mathcal{K}(X)$. Dann gilt:
   (a) $\alpha(\lambda \operatorname{id} - K) < \infty$ $(\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\})$
   (b) $(\lambda \operatorname{id} - K)(X)$ ist abgeschlossen $(\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\})$
   (c) $\dim X = \infty \quad \Longrightarrow \quad 0 \in \sigma(K)$.

Bsp. $X := C([a, b])$ sei versehen mit der Maximumsnorm

$$||f||_\infty = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|,$$

die X zu einem BANACH-Raum macht. Sei $Q = [a, b]^2$ und $\varkappa \in C(Q)$. Der lineare Operator

$$\Gamma : X \to X, \quad (\Gamma f)(s) := \int_a^b \kappa(s, t) f(t)\, dt \qquad (s \in [a, b], f \in X)$$

heißt FREDHOLM*scher Integraloperator*. Wegen

$$|(\Gamma f)(s)| \leq \underbrace{(b - a) \max_{(s,t) \in Q} |\varkappa(s, t)|}_{=:\gamma} \, ||f||_\infty \qquad (f \in X, s \in [a, b])$$

gilt $||\Gamma f||_\infty \leq (b-a)\gamma ||f||_\infty$, also $\Gamma \in L(X)$.

Nach dem Approximationssatz von WEIERSTRASS gilt

$$\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad p \in \mathbb{K}[x,y] \quad \forall \quad (s,t) \in Q : \qquad |\varkappa(s,t) - p(s,t)| \leq \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $p \in \mathbb{K}[x,y]$ wie in diesem Satz. Für

$$P : X \to X, \qquad (Pf)(s) := \int_a^b p(s,t) f(t)\, dt$$

zeigt man wie oben $P \in L(X)$.

Für p gibt es eine Darstellung

$$p(s,t) = \sum_{j=1}^m u_j(t) v_j(s)$$

mit $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m \in X$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} (Pf)(s) &= \sum_{j=1}^m \underbrace{\Big(\int_a^b u_j(t) f(t)\, dt \Big)}_{=:\alpha_j(f)} v_j(s) \\ \Longrightarrow \qquad Pf &= \sum_{j=1}^m \alpha_j(f) v_j \in [v_1, \ldots, v_m] \\ \Longrightarrow \quad &\dim P(X) \leq m < \infty, \end{aligned}$$

also $P \subseteq \mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{K}(X)$.

Nun gilt

$$\begin{aligned} |((\Gamma - P)f)(s)| &= |\int_a^b (\varkappa(s,t) - p(s,t)) f(t)\, dt| \\ &\leq (b-a)\varepsilon ||f||_\infty \\ \Longrightarrow \quad ||(T-P)f||_\infty &\leq (b-a)\varepsilon ||f||_\infty \\ \Longrightarrow \quad ||T-P|| &\leq (b-a)\varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $\Gamma \in \overline{\mathcal{K}(X)} = \mathcal{K}(X)$, also ist Γ kompakt.

Satz 36 (Satz von SCHAUDER) Es gilt

$$K \in \mathcal{K}(X,Y) \quad \Longleftrightarrow \quad K' \in \mathcal{K}(Y', X').$$

Def. 17 Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $P : V \to V$ linear mit $P^2 = P$. Dann heißt P *Projektor*.

Satz 37 V sein ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $P : V \to V$ ein Projektor. Dann gilt:

1. $(\mathrm{id} - P)^2 = \mathrm{id} - P$

2. $P(V) = \{x \in V : Px = x\}$, $\mathrm{Kern}(P) = (\mathrm{id} - P)(V)$ und $V = P(V) \oplus \mathrm{Kern}(V)$,

3. Ist V ein normierter Raum und $P \in L(V)$, so ist $P(V)$ abgeschlossen und im Fall $P \neq 0$ gilt $||P|| \geq 1$.

Def. 18 Sei U ein Unterraum von X. U heißt *stetig projizierbar*, falls ein Projektor $P \in L(X)$ existiert mit $P(X) = U$.

Bem. Stetig projizierbare Unterräume eines BANACH-Raums sind abgeschlossen. Die Umkehrung ist i. A. falsch.

Satz 38 Seien U, V Unterräume von X und $A \in L(X)$. Dann gilt:

1. Aus $\dim U < \infty$ folgt die stetige Projizierbarkeit von U.

2. Ist V abgeschlossen und $\text{co-dim}\, V < \infty$, so ist V stetig projizierbar.

3. Ist $X = U \oplus V$ und sind U und V abgeschlossen, so sind U und V stetig projizierbar.

4. Ist $\text{co-dim}\, A(X) < \infty$, so ist $A(X)$ stetig projizierbar.

5. Sei X ein HILBERT-Räum. Dann gilt: U ist genau dann abgeschlossen, wenn U stetig projizierbar ist.

Satz 39 Sei $A \in L(X)$. (λ_n) eine Folge in $\sigma_P(A)$, $r > 0$ und $|\lambda_n| \geq r$ $(n \in \mathbb{N})$. Weiter sei (M_n) eine Folge abgeschlossener Unterräume von X mit

$$M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq \cdots$$

$A(M_n) \subseteq M_n$ $(n \in \mathbb{N})$, $(\lambda_n \mathrm{id} - A)(M_n) \subseteq M_{n-1}$ $(n \geq 2)$. Dann gilt $A \notin \mathcal{K}(X)$.

Satz 40 Seien $K \in \mathcal{K}(X)$, $E \subseteq \sigma_(X)$, $r > 0$ und $|\lambda| \geq r$ $(\lambda \in E)$. Dann gilt:

1. $\beta(\lambda \mathrm{id} - K) > 0$ $(\lambda \in E)$

2. E ist endlich.

Satz 41 (Satz von RIESZ) Sei $K \in \mathcal{K}(X)$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\alpha(\lambda \mathrm{id} - K) = \beta(\lambda \mathrm{id} - K) = \alpha(\lambda \mathrm{id}' - K') = \beta(\lambda \mathrm{id}' - K') < \infty.$$

Satz 42 Sei $K \in \mathcal{K}(X)$. Dann gilt:

1. Ist $\lambda_0 \in \sigma(K)$ und $\lambda_0 \neq 0$, so ist $\lambda_0 \in \sigma_P(K)$ und λ_0 ist ein isolierter Punkt von $\sigma(K)$.

2. $\sigma(K)$ ist höchstens abzählbar.

3. Ist $\sigma(K) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \}$ mit $\lambda_n \neq \lambda_m$ $(m \neq n)$, so gilt $\lambda_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Satz 43 Sei $A \in L(X, Y)$, $A(X)$ abgeschlossen. Dann existiert ein $\gamma > 0$ mit

$$\forall \quad y \in A(X) \quad \exists \quad x \in X : \qquad Ax = y, ||x|| \leq \gamma ||y||.$$

Satz 44 Sei $K \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann gilt: $K(X)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn K in $\mathcal{F}(X,Y)$ liegt.

Satz 45 (Satz von WEYL) Seien $A, B \in L(X)$, $A - B$ kompakt. Dann gilt

$$\sigma(A) \setminus \sigma_(A) \subseteq \sigma(B).$$

Bsp. Sei wieder $H = l^2$ und $A \in L(H)$ der Shiftoperator. Wie oben gezeigt gilt

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}, \qquad \sigma_P(A) = \emptyset.$$

Sei $K \in \mathcal{K}(H)$, $B = A - K$, also $K = A - B$. Dann gilt nach obigem Satz

$$\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\} \subseteq \sigma(A - K).$$

5 Unbeschränkte Operatoren

Bsp. Sei $X = C([0,1])$ versehen mit der Maximumsnorm

$$||f||_\infty := \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$$

und $D(A) = C^1([0,1]) \subseteq X$. $A : D(A) \to X$ sei der Ableitungsoperator $Af := f'$. A ist nicht stetig: Wähle (f_n) mit

$$f_n(t) = \frac{1}{n} \sin(nt)$$

als Folge in $D(A)$. Dann gilt $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, aber (Af_n) ist divergent.

A ist abgeschlossen: Sei (f_n) eine Folge in $D(A)$ mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \in X$ und $Af_n \xrightarrow{n\to\infty} g \in X$, d.h. (f_n) konvergiere gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f und (f_n') gleichmäßig gegen g. Dann gilt $f \in C^1([0,1])$ und $f' = g$, also ist $f \in D(A)$ und es gilt $Af = g$.

Bem.

- In diesem Abschnitt sei X ein BANACH-Raum, $D(A)$ ein Unterraum von X und $A : D(A) \to X$ linear.
- Ist A injektiv, so existiert $A^{-1} : D(A^{-1}) \to X$, wobei $D(A^{-1}) = A(D(A))$.
- Ist $D(A)$ abgeschlossen und A abgeschlossen, so ist A stetig.
- Ist A abgeschlossen, so auch Kern(A), $\lambda\,\mathrm{id} - A$ ist abgeschlossen ($\lambda \in \mathbb{K}$) und es gilt $D(\lambda\,\mathrm{id} - A) = D(A)$.

Satz 46 Sei A abgeschlossen. Dann gilt:

1. Ist A injektiv, so ist A^{-1} abgeschlossen.
2. Ists A bijektiv, so gilt $A^{-1} \in L(X)$.

Def. 19

1. $\sigma_P(A) := \{\lambda\mathbb{K} : \exists\; x \in D(A) \setminus \{0\} : Ax = \lambda x\}$ heißt das *Punktspektrum* von A.

2. Sei A abgeschlossen. Dann heißt

$$\varrho(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \operatorname{id} - A \text{ ist bijektiv}\}$$

die *Resolventenmenge* von A. Für $\lambda \in \varrho(A)$ sei $R_\lambda(A) := (\lambda \operatorname{id} - A)^{-1} \in L(X)$ die *Resolvente* von A. $\sigma(A) = \mathbb{K} \setminus \varrho(A)$ heißt das *Spektrum* von A.

Bsp. $X = C([0,1])$ sei versehen mit der Maximumsnorm, $D(A) \subseteq C^1([0,1])$ und $Af = f'$.

- $D(A) = C^1([0,1])$. $Af = \lambda f$ bedeutet $f' = \lambda f$. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, also $f \in D(A)$, und
$$(Af)(t) = f'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda f(t).$$
Also $\sigma_P(A) = \mathbb{K}$ und damit $\sigma(A) = \mathbb{K}$ und $\varrho(A) = \emptyset$.

- $D(A) = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0\}$. A ist abgeschlossen. Das Anfangswertproblem
$$\lambda f - f' = g, \quad f(0) = 0$$
hat auf $[0,1]$ genau eine Lösung, d. h. $\lambda \operatorname{id} - A$ ist bijektiv. Also gilt $\varrho(A) = \mathbb{K}$ und damit $\sigma(A) = \emptyset$.

- $D(A) = \{f \in C^1([0,1] : f(0) = f(1)\}$. Sei $\lambda \in \sigma_(A)$. Dann existiert ein $f \in D(A)$, $f \neq 0$, mit $f' = \lambda f$ und ein $c \in \mathbb{K}$ mit $f(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t}$. Wegen $f \neq 0$ ist $c \neq 0$, und $f(0) = c, f(1) = c\mathrm{e}^{\lambda}$ fordert $\mathrm{e}^{\lambda} = 1$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $\lambda = 0$, also $\sigma_P(A) = \{0\}$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $\sigma_P(A) = \{2k\pi\mathrm{i} : k \in \mathbb{Z}\}$. In beiden Fällen ist $\sigma(A) = \sigma_P(A)$.

- $D(A) = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}$. Hier gilt $\sigma(A) = \emptyset$ und $\sigma(A) = \mathbb{K}$.

Satz 47 Sei A abgeschlossen. Dann gilt:

1. $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = -(\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A)$ $(\lambda, \mu \in \varrho(A))$

2. $\varrho(A)$ ist offen, $\sigma(A)$ ist abgeschlossen.

Def. 20

1. A heißt *dicht definiert*, falls $\overline{D(A)} = X$.

2. $D(A') = \{x' \in X : \exists\; y' \in X' : \langle Ax, x'\rangle = \langle x, y'\rangle \; (x \in D(A))\}$.

Satz 48 A sei dicht definiert.

1. Für jedes $x' \in D(A')$ existiert genau ein $y' \in X'$ mit
$$\langle Ax, x'\rangle = \langle x, y'\rangle \qquad (x \in D(A)).$$

2. $D(A')$ ist ein Unterraum von X'.

Def. 21 A sei dicht definiert, und $A' : D(A') \to X'$ sei definiert als der Operator, die jedem $x \in D(A')$ das eindeutig bestimmte $A'x' = y'$ zuordnet mit

$$\langle Ax, x' \rangle = \langle x, y' \rangle \qquad (x \in D(A)).$$

Dann heißt A' die *Adjungierte* oder *Konjungierte* von A.

Satz 49 A sei dicht definiert. Dann ist A abgeschlossen.

Satz 50 A sei abgeschlossen und dicht definiert.

1. A ist genau dann bijektiv, wenn A' bijektiv ist. In diesem Fall gilt $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.
2. $\varrho(A) = \varrho(A')$, $\sigma(A) = \sigma(A')$ und $R_\lambda(A') = (R_\lambda(A))'$ $(\lambda \in \varrho(A))$.

Def. 22 H sei ein HILBERT-Raum, $D(A)$ Unterraum von H und $A : D(A) \to H$ linear. Weiter sei

$$D(A^*) := \{y \in H : \exists\ y^* \in H : (Ax, y) = (x, y^*)\ (x \in D(A))\}.$$

Ist A dicht definiert, dann sei $A^* : D(A^*) \to H$ derjenige Operator, der jedem $y \in H$ das eindeutig bestimmte $A^*y := y^*$ mit der Eigenschaft

$$(Ax, y) = (x, y^*) \qquad (x \in D(A))$$

zuordnet. Dieses A^* heißt die *Adjungierte* von A.

Satz 51 H sei ein HILBERT-Raum und $A : D(A) \to H$ sei dicht definiert. Dann gilt:

1. A^* ist abgeschlossen.
2. Sei A abgeschlossen. Dann ist

   $$\sigma(A^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$$

   und es gilt

   $$(R_\lambda(A))^* = R_{\bar{\lambda}}(A^*) \qquad (\lambda \in \varrho(A))$$

6 Halbgruppen

In diesem Abschnitt sei X ein BANACH-Raum.

Def. 23 Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \to X$.

1. f heißt in $t_0 \in J$ *differenzierbar*, falls gilt

   $$\exists \quad y_0 \in X : \qquad \lim_{t \to t_0} \left|\left| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - y_0 \right|\right| = 0.$$

   Das in diesem Fall eindeutig bestimmte $y_0 =: f'(t_0)$ heißt *Ableitung* von f in t_0. f heißt auf J *differenzierbar*, falls f in jedem $t \in J$ differenzierbar ist. In diesem Fall wird durch $f' : J \to X$ eine Funktion definiert.

2. Sei $J[a,b]$ $(a < b)$ und $f : J \in X$ stetig. Sei $Z = \{t_0, \dots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, also

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b,$$

mit *Feinheitsmaß* $|Z| := \max_{1 \leq j \leq m}(t_j - t_{j-1})$. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ sei ein zu Z rpassender *Zwischenvektor*, also

$$t_{j-1} \leq \xi_j \leq t_j \qquad (j = 1, \dots, m).$$

Weiter sei

$$S(f, Z, \xi) := \sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j-1}) f(\xi_j).$$

Sei (Z_n) eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $|Z_n| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ und zu jedem z_n ein passendes $\xi^{(n)}$ gewählt. Dann bezeichnet

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} S(f, Z_n, \xi^{(n)})$$

das *Integral* von f über $[a,b]$.

Bem. Wie in der Analysis zeigt man:

- Das Integral ist wohldefiniert, d. h. der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Zerlegungen und Zwischenvektoren.
- $|| \int_a^b f(t)\, dt|| \leq \int_a^b ||f(t)||\, dt$
- Ist $F : [a,b] \to X$ definert durch $F(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau$, so ist F differenzierbar auf $[a,b]$ und dort gilt $F' = f$.
- Ist $g : [a,b] \to X$ differenzierbar auf $[a,b]$ und g' stetig, so gilt

$$\int_a^b g'(t)\, dt = g'(b) - g'(a).$$

- Sei $J = [a, \infty)$ $(a \in \mathbb{R})$ und $f : [a, \infty) \to X$ stetig. Dann sei

$$\int_a^\infty f(t)\, dt := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(t)\, dt,$$

falls dieser Grenzwert existiert.
Falls $\int_a^\infty ||f(t)||\, dt$ konvergiert, dann auch $\int_a^\infty f(t)\, dt$ und es gilt

$$|| \int_a^b f(t)\, dt|| \leq \int_a^b ||f(t)||\, dt.$$

Satz 52 Sei $A \in L(X)$ und $T(t) := \mathrm{e}^{tA}$ $(t \in \mathbb{R})$ und für $x \in X$ sei $u(t) = \mathrm{e}^{tA} x$.

1. Für $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $T(t)T(s) = T(t+s)$ sowie $T(0) = \mathrm{id}$.

2. $||T(t) - \mathrm{id}\,|| \xrightarrow{t \to 0} 0$.

3. T ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$T'(t) = A\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}A \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

4. Das Anfangswertproblem

$$u' = Au \qquad u(0) = x$$

hat genau eine Lösung, nämlich $u(t) = \mathrm{e}^{tA}x$.

Def. 24 Zu jedem $t \in [0, \infty)$ sei ein Operator $T(t) \in L(X)$ gegeben, und es gelte

$$T(t+s) = T(t)T(s) \quad (t, s \geq 0), \qquad T(0) = \mathrm{id}\,.$$

Dann heißt die Familie $\{T(t) : t \geq 0\}$ *Halbgruppe*.

Bem. In diesem Fall gilt $T(t)T(s) = T(s)T(t)$ $(s, t \geq 0)$.

Def. 25 Eine Halbgruppe $\{T(t) : t \geq 0\}$ heißt *gleichmäßig* stetig, falls gilt

$$\lim_{l \to 0+} ||T(t) - \mathrm{id}\,|| = 0.$$

Satz 53 Sei $\{T(t) : t \geq 0\}$ eine gleichmäßig stetige Halbgruppe. Dann gilt

$$\lim_{t \to t_0} ||T(t) - T(t_0)|| = 0.$$

Satz 54 Sei $D(A)$ ein Unterraum von X und $t : D(A) \to X$ linear. A ist genau dann Erzeuger einer gleichmäßig stetigen Halbgruppe $\{T(t) : t \geq 0\}$, wenn $D(A) = X$ und $A \in L(X)$. In diesem Fall konvergiert $\frac{T(t) - \mathrm{id}}{t}$ gleichmäßig gegen A.

Satz 55 $\{T(t) : t \geq 0\}$ und $\{S(t) : t \geq 0\}$ gleichmäßig stetige Halbgruppen. Weiter sei $A \in L(X)$. $\frac{T(t) - \mathrm{id}}{t}$ und $\frac{S(t) - \mathrm{id}}{t}$ mögen gleichmäßig gegen A konvergieren $(t \to 0+)$. Dann gilt $T(t) = S(t)$ $(t \geq 0)$.

Bem.

- $\exists \quad \omega \geq 0 \quad \forall \quad t \geq 0 : \qquad ||T(A)|| \leq \mathrm{e}^{\omega t}$.
- Es gibt genau ein $A \in L(X)$ mit $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$ $(t \geq 0)$, dieses A ist der Erzeuger der Halbgruppe.
- T ist auf $[0, \infty)$ differenzierbar und es gilt $T'(t) = AT(t) = T(t)A$ $(t \geq 0)$.

Def. 26 Die Halbgruppe $\{T(t) : t \geq 0\}$ heißt C_0-*Halbgruppe* (oder *stark stetig*), falls gilt

$$\lim_{t \to 0+} T(t)x = x \qquad (x \in X)$$

Satz 56 $\{T(t) : t \geq 0\}$ sei eine C_0-Halbgruppe. Dann gilt:

1. $\exists \quad M \geq 1, \omega \geq 0 \quad \forall \quad t \geq 0: \qquad ||T(t)|| \leq M e^{\omega t}$.
2. $\forall \quad t_0 \geq 0, x \in X: \qquad \lim\limits_{t \to t_0} ||T(t)x - T(t_0)x|| = 0$.

Satz 57 $\{T(t) : t \geq 0\}$ sei eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A. Dann gilt:

1. Für $t \geq 0, x \in X$ gilt
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x$$
2. Für $t \geq 0, x \in X$ gilt
$$\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A) \quad \text{und} \quad A(\int_0^t T(s)x \, ds) = T(t)x - x.$$
3. Ist $x \in D(A)$, so ist die Abbildung $t \mapsto T(t)$ auf $[0, \infty)$ differenzierbar und es gilt
$$\frac{d}{dt} T(t)x = T(t)tx = AT(t)x.$$
4. Für $t, s \geq 0$ und $x \in D(A)$ gilt
$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax \, d\tau = \int_s^t AT(t)x \, d\tau$$

Bem. $\{T(t) : t \geq 0\}$ und t seien wie oben. Das Anfangswertproblem
$$u' = Au, \qquad u(0) = x$$
hat die Lösung $u(t) = T(t)x$ auf $[0, \infty)$.

Satz 58 $\{T(t) : t \geq 0\}$ sei eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A. Dann ist A abgeschlossen und $\overline{D(A)} = X$.

Def. 27 $D(B), D(C)$ seine Unterräume von X und $B : D(B) \to X$, $C : D(C) \to X$ seien linear.

1. B und C heißen *identisch*, $B = C$, wenn $D(B) = D(C)$ ist und $Bx = Cx$ $(x \in D(B))$ gilt.
2. $D(BC) = \{x \in X : x \in D(C), Cx \in D(B)\} \subseteq D(C)$, $BC : D(BC) \to X$ ist definert als $(BC)x = B(Cx)$.
3. Ebenso definiert man induktiv $D(B^n)$ und $B^n : D(B^n) \to X$.
4. $D(B^0) := X$, $B^0 := \text{id}$.

Bem. Es gilt $D(B^{n+1}) \subseteq D(B^n)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Satz 59 Seien $\{T(t) : t \geq 0\}$ und $\{S(t) : t \geq 0\}$ C_0-Halbgruppen mit gemeinsamem Erzeuger A. Dann gilt $T(t) = S(t)$ $(t \geq 0)$.

Satz 60 $\{T(t) : t \geq 0\}$ sei eine C_0-Halbgruppe und A ihr Erzeuger. Dann gilt

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)} = X$$

Satz 61 Sei $\{T(t) : t \geq 0\}$ eine C_0-Halbgruppe und A ihr Erzeuger. Weiter gelte mit $M \geq 0$ auch $||T(t)|| \leq M$ $(t \in [0, \infty))$. Dann gilt

$$||Ax||^2 \leq 4M^2 ||A^2x|| \cdot ||x|| \qquad (x \in D(A^2)).$$

Bsp. Der Raum

$$X := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ beschränkt und gleichmäßig stetig auf } \mathbb{R}\}$$

ist versehen mit der Norm

$$||f||_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$$

ein BANACH-Raum. Zu $t \geq 0$ sei $T(t) \in L(X)$ definiert durch

$$(T(t)f)(\tau) := f(t + \tau) \qquad (\tau \in \mathbb{R}),$$

und es sei

$$D(A) := \{f \in X : f \text{ ist auf } \mathbb{R} \text{ differenzierbar mit } f' \in X\}.$$

Weiter sei

$$A : D(A) \to X, \qquad Af := f'.$$

Dann ist $\{T(t) : t \geq 0\}$ eine C_0-Halbgruppe und A ihr Erzeuger. Wegen $||T|| \leq 1$ $(t \geq 0)$ folgt aus obigem Satz die LAUDAsche Ungleichung

$$||f'||_\infty^2 \leq 4||f''||_\infty \cdot ||f||_\infty \qquad (f \in D(A^2)).$$

Satz 62 $D(A)$ sei ein Unterraum von X und $A : D(A) \to X$ sei linear, abgeschlossen und dicht definiert. Weiter gelte $(0, \infty) \subseteq \varrho(A)$ und

$$||R_\lambda(A)|| = ||\lambda \operatorname{id} - A||^{-1} \leq \frac{1}{\lambda} \qquad (\lambda > 0).$$

Dann gilt

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda(A)x = x \qquad (x \in X).$$

Def. 28 $D(A)$ sei ein Unterraum von X und $A : D(A) \to X$ sei linear, abgeschlossen und dicht definiert. Weiter gelte $(0, \infty) \subseteq \varrho(A)$ und

$$||R_\lambda(A)|| = ||\lambda \operatorname{id} - A||^{-1} \leq \frac{1}{\lambda} \qquad (\lambda > 0).$$

Dann heißt

$$A_\lambda := \lambda A R_\lambda(A) \qquad (\lambda > 0)$$

YOSIDA-*Approximation*.

Satz 63 $D(A)$ sei ein Unterraum von X und $A : D(A) \to X$ sei linear, abgeschlossen und dicht definiert. Weiter gelte $(0, \infty) \subseteq \varrho(A)$ und

$$||R_\lambda(A)|| = ||\lambda \,\mathrm{id} - A||^{-1} \leq \frac{1}{\lambda} \qquad (\lambda > 0).$$

Dann gilt:

1. $A_\lambda = \lambda^2 R_\lambda(A) - \lambda \,\mathrm{id}$, insbesondere $A_\lambda \in L(X)$ $(\lambda > 0)$.
2. $\lim\limits_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax$ $(x \in D(A))$.

Satz 64 $D(A)$ sei ein Unterraum von X und $A : D(A) \to X$ sei linear, abgeschlossen und dicht definiert. Weiter gelte $(0, \infty) \subseteq \varrho(A)$ und

$$||R_\lambda(A)|| = ||\lambda \,\mathrm{id} - A||^{-1} \leq \frac{1}{\lambda} \qquad (\lambda > 0).$$

Dann gilt:

1. $||\mathrm{e}^{tA\lambda}|| \leq 1$ $(t \geq 0, \lambda \geq 0)$
2. $||\mathrm{e}^{tA\lambda} x - \mathrm{e}^{tA_\lambda \mu} x|| \leq t||A_\lambda x - A\mu x||$ $(t \geq 0, x \in X, \lambda, \mu > 0)$
3. Für alle $x \in X$ existiert der Grenzwert
$$T(t)x := \lim_{\lambda \to \infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda} x.$$
Die Konvergenz ist lokal gleichmäßig in $t \in [0, \infty)$, d. h. gleichmäßig in t auf beschränkten Intervallen.
4. Für $t \geq 0$ und $x \in D(A)$ gilt
$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t \mathrm{e}^{sA_\lambda} A_\lambda x \, ds = \int_0^t T(s)Ax \, ds.$$
5. Die Abbildung $T(t) : X \to X$ ist linear und stetig, und es gilt $||T(t)|| \leq 1$ $(t \geq 0)$.
6. $\{T(t) : t \geq 0\}$ ist eine C_0-Halbgruppe.

Def. 29 Eine C_0-Halbgruppe $\{T(t) : t \geq 0\}$ heißt C_0-*Kontraktionshalbgruppe*, falls gilt $||T(t)|| \leq 1$ $(t \geq 0)$.

Bem. Sei $\{T(t) : t \geq 0\}$ eine C_0-Kontraktionshalbgruppe, $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\alpha := \mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Dann gilt

$$||\mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x|| \leq \mathrm{e}^{-\alpha t} \underbrace{||T(t)||}_{\leq 1} \cdot ||x||.$$

Damit konvergiert das Integral

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} ||x|| \, dt = \frac{1}{\alpha} ||x||.$$

Also exisitert auch die LAPLACE-*Transformierte*

$$R(\lambda)x := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x\,dt \in X$$

und es gilt

$$||R(\lambda)x|| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}||x||.$$

Satz 65 (Satz von HILLE-YOSIDA, Version 1) $D(A)$ sei ein Untervektorraum von X und $A : D(A) \to X$ sei linear. Dann gilt: A ist genau dann Erzeuger einer C_0-Kontraktionshalbgruppe, wenn A abgeschlossen und dicht definiert ist, $(0,\infty) \subseteq \varrho(A)$ gilt und

$$||R_\lambda(A)|| = ||\lambda\,\mathrm{id} - A||^{-1} \leq \frac{1}{\lambda} \qquad (\lambda > 0)$$

ist.

Bem. $\{T(t) : t \geq 0\}$ sei eine C_0-Kontraktionshalbgruppe, A ihr Erzeuger und $A_\lambda = \lambda A R_\lambda(A)$ $(\lambda > 0)$.

- Für $x \in X$ gilt
  $$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{e}^{tAA\lambda}x.$$
  Die Konvergenz ist lokal gleichmäßig in t.
- $\Omega := \{\lambda \in \mathbb{K} : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \varrho(A)$,
  $$R_\lambda(A)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x\,dt \qquad (x \in X, \lambda \in \Omega)$$
  und $||\lambda(A)|| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$ $(\lambda \in \Omega)$.

Bsp. Der Raum

$$X := \{f : [0,\infty) \to \mathbb{K} : f \text{ ist auf } [0,\infty) \text{ beschränkt und gleichmäßig stetig}\}$$

bildet mit

$$||f||_\infty := \sup_{t\geq 0} |f(t)|$$

einen BANACH-Raum. Sei

$$D(A) := \{f \in X : f \text{ ist differenzierbar, } f' \in X\}$$

und $Af := f'$ $(f \in D(A))$. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ und $f(t) := \mathrm{e}^{\lambda t}$, also $f'(t) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}$.

Wegen $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ ist $f \in X$ und damit $f \in D(A)$, und wegen $Af = \lambda f$ ist $\lambda \in \sigma_P(A) \subseteq \sigma(A)$. Also gilt

$$\{\lambda \in \mathbb{K} : \operatorname{Re}\lambda \leq 0\} \subseteq \sigma_P(A) \subseteq \sigma(A).$$

Zu $t \geq 0$ sei

$$T(t) : X \to X, \qquad (T(t)f)(\tau) := f(t+\tau).$$

Nach einem früheren Beispiel ist $\{T(t) : t \geq 0\}$ eine C_0-Kontraktionshalbgruppe, A ihr Erzeuger. Es gilt $\Omega \subseteq \varrho(A)$, damit $\Omega = \varrho(A)$ und somit

$$\sigma(A) = \sigma_P(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}.$$

Satz 66 $\{T(t) : t \geq 0\}$ sei eine C_0-Halbgruppe, A ihr Erzeuger und $\alpha \in \mathbb{R}$. Weiter sei

$$S(t) := \mathrm{e}^{\alpha t} T(t) \qquad (t \geq 0).$$

Dann ist $\{S(t) : t \geq 0\}$ eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger $A + \alpha\,\mathrm{id}$.

Satz 67 (Satz von HILLE-YOSIDA, Version 2) $D(A)$ sei ein Unterraum von X, $A : D(A) \to X$ linear und $\omega \geq 0$. Dann gilt: A ist genau dann Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $\{T(t) : t \geq 0\}$ mit $||T(t)|| \geq \mathrm{e}^{\omega t}$ $(t \geq 0)$, wenn A abgeschlossen und dicht definiert ist, und wenn gilt $(\omega, \infty) \subseteq \varrho(A)$ und

$$||R_\lambda(A)|| \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \qquad (\lambda > \omega).$$

Satz 68 (Satz von HILLE-YOSIDA, allgemeine Version) $D(A)$ sei ein Unterraum von X, $A : D(A) \to X$ linear, $M \geq 1$ und $\omega \geq 0$. Dann gilt: A ist genau dann Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $\{T(t) : t \geq 0\}$ mit $||T(t)|| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ $(t \geq 0)$, wenn A abgeschlossen und dicht definiert ist, und wenn gilt $(\omega, \infty) \subseteq \varrho(A)$ und

$$||R_\lambda(A)^n|| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \qquad (\lambda \geq \omega, n \in \mathbb{N}).$$

In diesem Fall gilt:

1. $\forall\, x \in X : T(t)x = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \mathrm{e}^{tA\lambda} x$. Die Konvergenz ist lokal gleichmäßig in t.
2. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ gilt $\lambda \in \varrho(A)$ und
$$R_\lambda(A)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x\, dt \qquad (x \in X).$$

Satz 69 $\{T(t) : t \geq 0\}$ sei eine C_0-Halbgruppe und

$$A(h) := \frac{T(h) - \mathrm{id}}{h} \qquad (h > 0).$$

Dann gilt

$$T(t)x = \lim_{h \to 0+} \mathrm{e}^{tA(h)} x \qquad (x \in X)$$

lokal gleichmäßig in t.

7 Vektorwertige holomorphe Funktionen

In diesem Abschnitt sei X ein komplexer BANACH-Raum, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to X$ eine Funktion.

Def. 30

1. f heißt in $\lambda_0 \in D$ *differenzierbar*, wenn der Grenzwert
$$f'(\lambda_0) := \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$$
in X existiert. In diesem Fall heißt $f'(\lambda_0)$ die *Ableitung* von f an der Stelle λ_0.

2. f heißt auf D *holomorph*, wenn f in jedem Punkt $\lambda \in D$ differenzierbar ist. In diesem Fall wird durch

$$f' : D \to X, \qquad \lambda \mapsto f'(\lambda)$$

die *Ableitungsfunktion* definiert.

3. Ist $f' : D \to X$ seinerseits auf D differenzierbar, so heißt $f'' := (f')'$ die zweite Ableitung von f. Induktiv definiert man $f^{(0)} := f$, $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$ $(n \in \mathbb{N})$.

4. f heißt auf D *schwach* holomorph, falls für jedes $x' \in X'$ die Funktion $x' \circ f : D \to \mathbb{C}$ holomorph auf D ist

Satz 70 Ist f auf D schwach holomorph, dann ist f auf D stetig.

Satz 71 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge in X, $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}$ und $r := |\lambda_0 - \lambda_1| > 0$. Weiter sei für jedes $x' \in X'$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x'(a_n)(\lambda_1 - \lambda_0)^n$$

konvergent. Dann konvergieren auch die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||a_n|| \cdot |\lambda - \lambda_0|^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} ||a_n|| \cdot |\lambda - \lambda_1|^n \qquad (\lambda \in U_r(\lambda_0)).$$

Satz 72 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge in X, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Für jedes $x' \in X$ und jedes $\lambda \in U_r(\lambda_0)$ sei die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x'(a_n)(\lambda - \lambda_0)^n$$

konvergent. Dann gilt:

1. Die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||a_n|| \cdot |\lambda - \lambda_0|^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda - \lambda_0)^n$$

konvergieren für alle $\lambda \in U_r(\lambda_0)$.

2. Die Funktion

$$f : U_r(\lambda_0) \to X, \qquad f(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda - \lambda_0)^n$$

ist auf U_r beliebig oft differenzierbar. Insbesondere ist f auf $U_r(\lambda_0)$ holomorph. Weiter gilt

$$f^{(n)}(\lambda) = \sum_{k=n}^{\infty} (k - n + 1) \cdots k \cdot a_k \cdot (\lambda - \lambda_0)^{n-k}$$

für $n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in U_r(\lambda_0)$ und

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Def. 31 Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein rektifizierbarer Weg, $|\gamma| := \gamma([a,b])$ der Bogen von γ. Weiter sei $g : |\gamma| \to X$ stetig. $Z = \{t_0, \ldots, t_n\}$ sei eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein zu Z passender Zwischenvektor, und

$$\sigma(g, Z, \xi) := \sum_{j=1}^{n} g(\gamma(\xi_j))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})).$$

Es sei $s \in X$ der eindeutig bestimmte Punkt mit

$$\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 : \qquad ||\sigma(g, Z, \xi) - s|| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ mit $|Z| < \delta$ und jeden zu Z passenden Zwischenvektor ξ. Dann heißt

$$\int_\gamma g(\lambda)\, d\lambda := \int_a^b g(\gamma(t))\, d\gamma(t) := s \in X$$

das *Wegintegral* von g über γ.

Satz 73 Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein rektifizierbarer Weg und

$$h, g, g_1, g_2, \ldots : |\gamma| \to X$$

stetig. Neben X seien Y, Z komplexe Banach-Räume, $A \in L(X,Y)$, $x' \in X'$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $\displaystyle\int_\gamma (\alpha g(\lambda) + \beta h(\lambda))\, d\lambda = \alpha \int_\gamma g(\lambda)\, d\lambda + \beta \int_\gamma h(\lambda)\, d\lambda$
2. Konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $|\gamma|$ gleichmäßig gegen g, so gilt
$$\int_\gamma g(\lambda)\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma g_n(\lambda)\, d\lambda.$$
3. $\displaystyle A(\int_\gamma g(\lambda)\, d\lambda) = \int_\gamma A(g(\lambda))\, d\lambda,\ x'(\int_\gamma g(\lambda)\, d\lambda) = \int_\gamma x'(g(\lambda))\, d\lambda.$
4. Ist $X = L(Z)$, so gilt
$$\Big(\int_\gamma g(\lambda)\, d\lambda\Big) z = \int_\gamma (g(\lambda) z)\, d\lambda \qquad (z \in Z).$$

Def. 32

1. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sei ein rektifizierbarer Weg, $z \notin |\gamma|$. Dann heißt
$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\lambda - z}\, d\lambda$$
die *Umlaufzahl* von γ um z.

2. Es seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ geschlossene und rektifizierbare Wege in D, d. h. $|\gamma_i| \subseteq D$. Dann heißt

$$\Gamma := \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$$

ein *Zykel* in D. Weiter seien

$$|\Gamma| := \bigcup_{i=1}^{\infty} |\gamma_i| \subseteq D,$$

$$n(\Gamma, z) := \sum_{j=1}^{n} n(\gamma_j, z) \qquad (z \notin |\Gamma|).$$

Ist $f : D \to X$ stetig, so sei

$$\int_\gamma f(\lambda)\, d\lambda := \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(\lambda)\, d\lambda.$$

3. Ein Zykel $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ heißt *nullhomolog*, falls gilt $n(\Gamma, z) = 0$ $(z \notin D)$.

Satz 74 (Cauchyscher Integralsatz) Sei $f : D \to X$ holomorph auf D. Dann gilt:

1. Sind Γ_1, Γ_2 Zykeln in D mit $n(\Gamma_1, z) = n(\Gamma_2, z)$ $(z \notin D)$, so gilt

$$\int_{\Gamma_1} f(\lambda)\, d\lambda = \int_{\Gamma_2} f(\lambda)\, d\lambda.$$

2. Ist Γ ein in D nullhomologer Zykel, so ist

$$\int_\Gamma f(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Satz 75 Sei $f : D \to X$ auf D schwach holomorph.

1. Ist $\lambda_0 \in D$ und $r > 0$ derart, daß $\overline{U_r(\lambda_0)} \subseteq D$,

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) := \lambda_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

und

$$a_n := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}\, d\lambda \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

so gilt:

   (a) $f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n$ $(\lambda \in U_d(\lambda_0))$, wobei $d = d(\lambda_0, \partial D)$ mit $U_d(\lambda_0) = \mathbb{C}$ falls $D = \mathbb{C}$.

   (b) f ist auf D beliebig oft differenzierbar, also insbesondere holomorph auf D.

2. (Cauchysche Integralformel) λ_0, r und γ seien wie oben. Dann gilt

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)^{n+1}}\, d\lambda \qquad (z \in U_r(\lambda_0), n \in \mathbb{N}).$$

Satz 76 (Satz von LIOUVILLE) Ist $f : \mathbb{C} \to X$ holomorph und beschränkt auf $\mathbb{C}$, so ist f konstant.

Satz 77 (LAURENT-Entwicklung) Sei $r > 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$,

$$D := \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \lambda_0| < r\}$$

und $f : D \to X$ holomorph auf D. Weiter sei $0 < \varrho < r$ und

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) := \lambda_0 + \varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

Mit

$$a_n := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}\, d\lambda \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

und

$$b_n := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{n-1}\, d\lambda \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gilt

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(\lambda - \lambda_0)^n} \qquad (\lambda \in D).$$

Def. 33 Sei $r > 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $D := \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda - \lambda_0| < r\}$ und $f : D \to X$ holomorph auf D. b_n $(n \in \mathbb{N})$ seien wie in obigem Satz. λ_0 heißt:

1. *hebbare Singularität*, falls $b_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$
2. *Pol* der Ordnung p von f, falls $b_p \neq 0$ und $b_n = 0$ $(n > p)$.
3. *wesentliche Singularität*, falls $b_n \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Satz 78 Sei $\mathfrak{A}$ eine BANACH-Algebra mit Einselement $e \neq 0$, $x \in \mathfrak{A}$ und

$$f : \varrho(x) \to \mathfrak{A}, \qquad f(\lambda) := r_\lambda(x) = (\lambda e - x)^{-1}.$$

Dann gilt:

1. f ist auf $\varrho(x)$ holomorph und es gilt
$$f^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \cdot n! \cdot (r_\lambda(x))^{n+1} \qquad (\lambda \in \varrho(x), n \geq 0).$$
2. Ist λ_0 ein isolierter Punkt von $\sigma(x)$, so ist λ_0 ein Pols oder eine wesentliche Singularität.

8 Der DUNFORDsche Funktionalkalkül

In diesem Abschnitt sei $\mathfrak{A}$ eine komplexe BANACH-Algebra mit Einselement $e \neq 0$.

Satz 79 Sei $x \in \mathfrak{A}, r > 0, r(x) < r$ und $f : U_r(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter seien $\varrho \in (r(x), r)$ und

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : \qquad \gamma(t) = \varrho e^{it}.$$

Dann gilt:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda) r_\lambda(x)\, d\lambda.$$

Def. 34 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subseteq D$ kompakt. Ein Zykel Γ in D heißt *zulässig* für (K, D), falls $|\Gamma| \cap K = \emptyset$, Γ in D nullhomolog ist und $n(\Gamma, z) = 1$ $(z \in K)$ gilt.

Bem. Zu (K, D) existiert stets ein zulässiger Zykel.

Def. 35 Sei $x \in \mathfrak{A}$ und

$$\mathcal{H}(x) := \{f : D_f \to \mathbb{C} : f \text{ ist holomorph auf } D_f \subseteq D \text{ offen}, \sigma(x) \subseteq D_f\}.$$

Weiter sei $f \in \mathcal{H}(x)$ und Γ ein für $(\sigma(x), D_f)$ zulässiger Zykel. Dann sei

$$f(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) r_\lambda(x)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \in \mathfrak{A}$$

Bem.

- Die obige Definition von $f(x)$ ist unabhängig von der Wahl von Γ.
- Sei $x \in \mathfrak{A}, r > 0, r(x) < r$ und $f : U_r(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter seien $\varrho \in (r(x), r)$ und

  $$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : \qquad \gamma(t) = \varrho e^{it}.$$

  Dann ist $\{\gamma\}$ zulässig für $(\sigma(x), D_f)$. Sei Γ ein weiterer zulässiger Zykel für $(\sigma(x), D_f)$. Dann gilt

  $$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) r_\lambda(x)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{ind}_\gamma f(\lambda) r_\lambda(x)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

- Sei $f \in \mathcal{H}(x), D \subseteq D_f$ offen, $\sigma(x) \subseteq D$ und $g := f|_D$. Dann ist $g \in \mathcal{H}(x)$ und es gilt $g(x) = f(x)$.
- Sind $f, g \in \mathcal{H}(x)$ mit $f = g$ auf $D_f \cap D_g$, so gilt $f(x) = g(x)$.
- Für $x \in \mathfrak{A}^{-1}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $x^{-n} := (x^{-1})^n$.

Satz 80 Sei $x \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in \varrho(x)$ und Γ sei ein für $(\sigma(x), \mathbb{C} \setminus \{\alpha\})$ zulässiger Zykel. Dann gilt

$$(\alpha e - x)^n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\alpha - \lambda)^n r_\lambda(x)\, d\lambda \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Satz 81 Sei $x \in \mathfrak{A}$, R eine rationale Funktion, also

$$R(\lambda) = p(\lambda) + \sum_{m,k} c_{m,k} (\alpha_m - \lambda)^{-k}$$

für ein Polynom p und komplexen Koeffizienten $c_{m,k}$ und α_m. Die Pole α_m mögen in $\varrho(x)$ liegen. Dann gilt $R \in \mathcal{H}(x)$ und

$$R(x) = p(x) + \sum_{m,k} c_{m,k} (\alpha_m \cdot e - x)^{-k}.$$

9 Kompakte Operatoren auf HILBERT-Räumen

In diesem Abschnitt sei H ein HILBERT-Raum.

Satz 82 $A \in L(H)$ sei normal.

1. Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq \mu$ und $x, y \in H$ mit $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, dann gilt $A^*x = \bar{\lambda}x$ und $(x, y) = 0$.

2. Es gilt genau dann $\lambda \in \sigma(A)$, wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H existiert mit $||x_n|| = 1$ und $(\lambda \operatorname{id} - A)x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

3. $||A|| = \sup\limits_{||x||=1} |(Ax, x)|$.

4. Ist A symmetrisch, so ist $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ $(x \in H)$.

5. A sei symmetrisch und kompakt, $A \neq 0$. Dann gilt

   (a) $-||A|| \in \sigma_p(A)$ oder $||A|| \in \sigma_P(A)$.
   (b) $||A|| = \max_{||x||=1} |(Ax, x)|$.
   (c) $\sigma_P(A) \setminus \{0\} \neq \emptyset$.
   (d) Ist U ein abgeschlossener Unterraum von A mit $A(U) \subseteq U$, so ist $A|_U \in L(U)$ symmetrisch und kompakt.

Satz 83 (Entwicklungssatz) $A \in L(H)$ sei symmetrisch und kompakt, $A \neq 0$. Es sei

$$\sigma_P(A) \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$$

mit $|\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}|$ $(i \in \mathbb{N})$.

1. Ist $\sigma_P(A) \setminus \{0\}$ unendlich, so gibt es ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{u_1, u_2, \dots\}$ mit $Au_n = \lambda_n u_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, u_k) u_k \qquad (x \in H),$$

   und es gilt $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

2. Ist $\sigma_P(A)\setminus\{0\}$ endlich, so gibt es ein endliches Orthonormalsystem $\{u_1, \dots$ $\dots, u_m\}$ mit $Au_n = \lambda_n u_n$ $(n = 1, \dots, m)$ und

$$Ax = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (x, u_k) u_k \qquad (x \in H).$$

Def. 36 $A \in L(H)$ symmetrisch heißt *positiv*, Schreibweise $A \geq 0$, falls gilt $(Ax, x) \geq 0$ $(x \in H)$.

Satz 84 Sei $A \in L(H)$ symmetrisch, kompakt und positiv, $A \neq 0$. (λ_n) sei eine Aufzählung von $\sigma_P(x) \setminus \{0\}$. Dann gilt: $\lambda_n > 0$ für alle n.

Satz 85 Sei $A \in L(H)$ symmetrisch und kompakt, $A \neq 0$. Dann ist das Orthonormalsystem $\{u_1, u_2, \dots\}$ aus Satz 83 eine Orthonormalbasis von $\overline{A(H)}$.

Satz 86 Sei $K \in \mathcal{K}(H), K \neq 0$. Dann gebt es (evtl. endliche) Folgen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H mit $\mu_n > 0$, $\{u_1, u_2, \dots\}$, $\{v_1, v_2, \dots\}$ Orthonormalsysteme in H und

$$Kx = \sum_n \mu_n (x, u_n) v_n \qquad (x \in H).$$

Sind obige Folgen unendlich, so konvergiert (μ_n) gegen 0.

Satz 87 Sei X ein normierter Raum und J ein Ideal in $L(X)$, $J \neq \{0\}$. Dann gilt $\mathcal{F}(X) \subseteq J$.

Satz 88 Sei J ein Ideal in $L(H)$, $J \neq \{0\}$. Dann gilt:

1. $\mathcal{F}(H) \subseteq J$
2. $\overline{\mathcal{F}(H)} = \mathcal{K}(H)$
3. Ist J abgeschlossen, dann gilt $\mathcal{K}(H) \subseteq J$.

10 Symmetrische Operatoren

In diesem Abschnitt sei H ein Hilbert-Raum.

Bem. Ist H komplex und $T : H \to H$ linear, so gilt

$$\begin{aligned} 4(Tx, y) = (T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y) + \\ \mathrm{i}(T(x+\mathrm{i}y), x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}(T(x-\mathrm{i}y), x-\mathrm{i}y) \end{aligned}$$

für $x, y \in H$.

Satz 89 Seien $A, B \in L(H)$ symmetrisch. Dann gilt:

1. Für $A \geq 0$ gilt die *verallgemeinerte* Cauchy-Schwarzsch Ungleichung
$$|(Ax, y)|^2 \leq (Ax, x) \cdot (Ay, y) \qquad (x, y \in H).$$
2. $A = B \iff (Ax, x) = (Bx, x)$ $(x \in H)$.

Bsp. Die Symmetrie ist für letztere Aussage notwendig: Sei $H = \mathbb{R}^2$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $(Ax, x) = 0 = (Bx, x)$ $(x \in H)$, aber $A \neq B$.

Satz 90 Sei H komplex und $A, B : H \to H$ linear. Dann gilt:

1. A ist genau dann symmetrisch, wenn $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{R})$ ist.
2. $A = B \iff (Ax, x) = (Bx, x)$ $(x \in H)$.

Satz 91 Seien $A, B \in L(H)$ symmetrisch. Dann gilt:

1. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha A + \beta B$ symmetrisch.
2. Für $n \in \mathbb{N}$ ist A^n symmetrisch.
3. AB ist genau dann symmetrisch, wenn gilt $AB = BA$.

Def. 37 $A, B \in L(H)$ seien symmetrisch. Dann stehe $A \leq B$ für die Aussage

$$\forall \quad x \in H: \qquad (Ax, x) \leq (Bx, x)$$

und $A \geq B$ für $B \leq A$.

Bem.

- Es gilt $A \leq B \iff B - A \geq 0$.
- Sind $A, B \in L(H)$ und $0 \leq A \leq B$ mit

  $$0 \leq (Ax, x) \leq (Bx, x) \qquad (x \in H, ||x|| = 1),$$

  so ist $||A|| \leq ||B||$.

Def. 38 Zu symmetrischem $A \in L(H)$ seien

$$m(A) := \inf_{||x||=1} (Ax, x), \qquad M(A) := \sup_{||x||=1} (Ax, x).$$

Bem. Es gilt $-||A|| \leq m(A) \leq ||A||$ und $||A|| = \max\{|m(A)|, |M(A)|\}$.

Satz 92 Sei $B \in L(H)$ symmetrisch, $B \geq 0$. Dann gilt

$$||Bx||^4 \leq (Bx, x)||B||^3||x||^2 \qquad (x \in H).$$

Satz 93 $A \in L(H)$ sei symmetrisch. Dann gilt:

1. Ist H komplex, so gilt

   $$||R_\lambda(A)|| \leq \frac{1}{||m(\lambda)||} \qquad (\lambda \notin \mathbb{R}).$$

2. $\sigma(A) \subseteq [m(A), M(A)]$, $m(A), M(A) \in \sigma(A)$.

Satz 94 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine bezüglich $\leq$ monotone und durch $B \in L(A)$ beschränkte Folge symmetrischer Operatoren in $L(A)$. Dann konvergiert $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen einen symmetrischen Operator $A \in L(H)$.

11 Der Funktionalkalkül für symmetrische Operatoren

In diesem Abschnitt sei H ein komplexer HILBERT-Raum, $A \in L(H)$ symmetrisch und $m := m(A), M := M(A)$. $\mathcal{P}$ sei die Menge aller reellen Polynome $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$ $(n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{R})$. Für $p \in \mathcal{P}$ ist $p(A)$ ein symmetrischer Operator. Es sei

$$\mathcal{P}^+ := \{p \in \mathcal{P} : p \geq 0 \text{ auf } \sigma(A) \subseteq [m, M]\}.$$

Satz 95

1. $A \geq 0 \iff \sigma(A) \subseteq [0, \infty]$
2. Für $p \in \mathcal{P}^+$ gilt $p(A) \geq 0$.
3. Gilt $p \leq q$ auf $\sigma(A)$ für $p, q \in \mathcal{P}$, so gilt $p(A) \leq q(A)$.
4. Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine auf $\sigma(A)$ monoton fallende Folge in $\mathcal{P}^+$. Dann gilt:
   (a) Für jedes $\lambda \in \sigma(A)$ existiert der Grenzwert
   $$\lim_{n\to\infty} p_n(\lambda).$$
   (b) Die Folge $(p_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen einen symmetrischen Operator $B \in L(H)$.

Satz 96 Es seien $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\sigma(A)$ monoton fallende Folgen in $\mathcal{P}^+$ und

$$f, g : \sigma(A) \to [0, \infty), \qquad f(\lambda) := \lim_{n\to\infty} p_n(\lambda), g(\lambda) := \lim_{n\to\infty} q_n(\lambda).$$

Weiter seien $B, C \in L(H)$ symmetrisch mit

$$p_n(A) \xrightarrow{n\to\infty} B, \qquad q_n(A) \xrightarrow{n\to\infty} C.$$

Dann gilt: Aus $f \leq g$ auf $\sigma(A)$ folgt $B \leq C$.

Def. 39 $\mathcal{L}^+$ sei die Menge aller Funktionen $f : \sigma(A) \to [0, \infty)$, für die eine auf $\sigma(A)$ monoton fallende Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $p_n(\lambda) \xrightarrow{n\to\lambda} f(\lambda)$ $(\lambda \in \sigma(A))$ existiert. Zu $f \in \mathcal{L}^+$ heißt eine solche Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zulässig*.

Bem.

- Sei $f \in \mathcal{L}^+$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zulässig für f. Dann existiert ein symmetrischer Operator $B \in L(H)$ mit $p_n(A) \xrightarrow{n\to\infty} B$ punktweise. Dies motiviert die Definition $f(A) := B$. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Ist $p \in \mathcal{P}^+$, so ist $(p_n) := (p, p, p, \dots)$ zulässig für p, also $p \in \mathcal{L}^+$, und die obige Definition von $p(A)$ stimmt smit der früheren Definition überein.

Satz 97 Es seien $f, g \in \mathcal{L}^+$, $\alpha \geq 0$ und $T \in L(H)$ mit $TA = AT$. Dann gilt

1. $f(A)$ ist symmetrisch, $f(A) \geq 0$, $\alpha f \in \mathcal{L}^+$, $f + g \in \mathcal{L}^+$, $(\alpha f)(A) = \alpha f(A)$, $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$.
2. $fg \in \mathcal{L}^+$ und $(fg)(A) = f(A)g(A) = g(A)f(A)$.
3. Aus $f \leq g$ auf $\sigma(A)$ folgt $f(A) \leq g(A)$.
4. $Tf(A) = f(A)T$.

Def. 40 Es sei

$$\mathcal{L} := \{f : \sigma(A) \to \mathbb{R} : \exists\, g, h \in \mathcal{L}^+ : f = g - h\},$$

und zu $f \in \mathcal{L}$ mit $f = g - h$ $(g, h \in \mathcal{L}^+)$ sei $f(A) := g(A) - h(A)$.

Bem. $f(A)$ ist wohldefiniert für $f \in \mathcal{L}$.

Satz 98 Es seien $f, g \in \mathcal{L}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $T \in L(H)$ mit $TA = AT$. Dann gilt:

1. $f(A)$ ist symmetrisch, $\alpha f \in \mathcal{L}$, $f + g \in \mathcal{L}$, $(\alpha f)(A) = \alpha f(A)$ $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$.
2. $fg \in \mathcal{L}$, $(fg)(A) = f(A)g(A) = g(A)f(A)$.
3. Aus $f \leq g$ auf $\sigma(A)$ folgt $f(A) \leq g(A)$.
4. $Tf(A) = f(A)T$.

Index

A

Abgeschlossenheit 5
Ableitung 18, 25
Ableitungsfunktion 26
Ableitungsoperator 16
Adjungierte 3, 6, 18
Algebra 7
  Banach- 7–12
  Divisions- 11
  Eins 7
  Invertierbarkeit 7
  normierte 7
Approximation
  Yosida- 22

B

Banach-Algebra 7–12
Bidualraum 2
Bilddefekt 12

C

Cauchy, Integralsatz von 28
Cauchy-Schwarzsche Ungleichung
  verallgemeinerte 32
Cauchysche Integralformel 28

D

dicht definiert 17
Differenzierbarkeit 18, 25
Divisionsalgebra 11
Dualität 3–6

E

Eins 7
Entwicklungssatz 31
Exponentialfunktion 11

F

Feinheitsmaß 19
Folge
  Zulässigkeit 34
Fredholmscher Integraloperator . 13
Funktionalkalkül 29–30, 33–35

G

Gelfand-Masur, Satz von 11
Graph 5
  abgeschlossener 5
Graphennorm 5

H

Halbgruppe 18–25
  C_0 20
  C_0-Kontraktions- 23
  stark stetige 20
Hellinger-Töplitz, Satz von 6
Hille-Yosida, Satz von 24, 25
Holomorphie 25–29
  schwache 26

I

Ideal 13
idempotent 9
identisch 21
Injektion
  kanonische 4
Integral 19
  Weg- 27
Integralformel von Cauchy 28
Integraloperator
  Fredholmscher 13
Integralsatz von Cauchy 28
Inverse 7
  stetige 3
Invertierbarkeit 7

K

Kato, Satz von 4
Kompaktheit 13–16, 31–32
Konjungierte 3, 18
Kontraktionshalbgruppe 23

L

Laplace-Transformierte 24
Laurent-Entwicklung 29
Liouville, Satz von 29

M

Minimalmodul 4

N

nilpotent 10
  quasi- 10
Norm

Graphen- 5
Operator- 1
normal 11
Nulldefekt 12
Nullhomologie 28

O
Operator 3–6
Abgeschlossenheit 5
Ableitungs- 16
Adjungierte 3, 6, 18
Bilddefekt 12
dicht definierter 17
Kompaktheit 13–16, 31–32
Konjungierte 3, 18
Minimalmodul 4
normaler 11
Nulldefekt 12
positiver 31
selbstadjungiert 6
Shift- 10
Symmetrie 6, 32–35
unbeschränkter 16–18
Operatornorm 1

P
Pol 29
Projektor 14
Projizierbarkeit
stetige 15
Punktspektrum 9, 17

Q
quasinilpotent 10

R
Raum
Bidual- 2
reflexiver 2
Reflexivität 2
Reihe
Neumannsche 8
Residualspektrum 9
Resolvente 8, 17
Resolventengleichung 9
Resolventenmenge 8, 17
Riesz, Satz von 15

S
Schauder, Satz von 14
selbstadjungiert 6
Shiftoperator 10
Singularität
hebbare 29
wesentliche 29
Spektralradius 8
Spektraltheorie 7–12
Spektrum 8, 17
kontinuierliches 9
Punkt- 9, 17
Residual- 9
Stetigkeit
gleichmäßige 20
starke 20
Symmetrie 6, 32–35

U
Umlaufzahl 27
Ungleichung
Laudasche 22

V
Vektorraum
Kodimension 4

W
Weg
Umlaufzahl 27
Wegintegral 27
Weierstraß, Approx.-satz von . . . 14
Weyl, Satz von 16

Y
Yosida-Approximation 22

Z
Zwischenvektor 19
Zykel 28
nullhomologer 28
zulässiger 30