Funktionalanalysis I

Manuel Kauers
nach einer Vorlesung von
Prof. Dr. R. Lemmert

11. August 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Voraussetzungen **2**

2 Metrische Räume **3**

3 Vollständige Räume **4**

4 Der Banachsche Fixpunktsatz **5**

5 Der Bairesche Kategoriensatz **6**

6 Der Satz von Osgood **6**

7 Kompaktheit **6**

8 Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach **7**

9 Halbnormen und Normen **9**

10 Der topologische Dualraum **11**

11 Der Satz von Alaoglu-Bourbaki **12**

12 Der Satz von Krein-Milman **12**

13 Das Lemma von Riesz **12**

14 Die schwache Topologie **13**

15 Innenprodukträume und Hilbert-Räume **13**

16 Stetige lineare Abbildungen **16**

17 Der Satz von Banach-Steinhaus **18**

18 Der Satz von der offenen Abbildung **19**

19 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen **21**

20 Dualität in polynormierten Räumen **21**

21 Der adjungierte Operator **22**

22 Der Minimalmodul **23**

23 FREDHOLM-**Operatoren** **23**

24 Kompakte Operatoren **24**

1 Voraussetzungen

Def. 1 Sei X eine Menge.

1. Eine Relation $\leq$ auf X mit

   (a) $\forall \quad x \in X: \qquad x \leq x$
   (b) $\forall \quad x, y \in X: \qquad x \leq y, y \leq x \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$
   (c) $\forall \quad x, y, z \in X: \qquad x \leq y, y \leq z \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq z$

   heißt *Teilordnung* auf X, und X heißt *teilgeordnet* bezüglich $\leq$. Gilt ferner

   $$\forall \quad x, y \in X: \qquad x \leq y \quad \vee \quad y \leq x,$$

   so heißt $\leq$ *Ordnung* und X (*linear*) *geordnet*. Besitzen je zwei Elemente von X eine gemeinsame obere Schranke, so heißt X *gerichtet*.

2. Eine Abbildung $x : M \to X$ einer gerichteten Menge M in eine Menge X heißt *Netz* in X, Schreibweise $(x_m)_{m \in M}$. Für das spezielle $M = \mathbb{N}$ heißt x *Folge*.

Def. 2 Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit

1. $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$,
2. $\forall \quad A, B \in \mathcal{T}: \qquad A \cap B \in \mathcal{T}$
3. $\forall \quad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}: \qquad \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A \in \mathcal{T}$.

Dann heißt $\mathcal{T}$ eine *Topologie* auf X.

Def. 3 Sei X eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Toplologie auf X.

1. Die Elemente $A \in \mathcal{T}$ heißen *offen*.
2. Ist $B \subseteq X$ von der Form $B = X \setminus A$ mit $A \in \mathcal{T}$, so heißt B *abgeschlossen*.
3. Zu $M \subseteq X$ sei $\mathcal{O}(M)$ die Menge aller $A \subseteq M$ offen und $\mathcal{A}(M)$ die Menge aller $A \supseteq M$ abgeschlossen.
4. Zu $M \subseteq X$ heißen $\mathrm{int}(M)$, $\mathrm{cl}(M)$ mit

   $$\mathrm{int}(M) := \bigcup_{O \in \mathcal{O}(M)} O, \qquad \mathrm{cl}(M) := \bigcap_{A \in \mathcal{A}(M)} A$$

   das *Innere* bzw. das *Äußere*.

5. Gilt $\mathrm{cl}(M) = X$, so heißt M *dicht* in X.
6. Existieren zu je zwei Punkten $a, b \in X$, $a \neq b$ offene Mengen $A, B \subseteq X$ mit $a \in A, b \in B$ und $A \cap B = \emptyset$, so heißt $\mathcal{T}$ HAUSDORFF*sch*.

2 Metrische Räume

Def. 4 Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit

1. $\forall \quad x \in X : \qquad d(x,x) = 0,$
2. $\forall \quad x, y \in X : \qquad d(x,y) = d(y,x),$
3. $\forall \quad x, y, z \in X : \qquad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$

Dann heißt (X, d) *halbmetrischer Raum* und d heißt *Halbmetrik* auf X. Gilt ferner

$$\forall \quad x, y \in X : \qquad d(x,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y,$$

so heißt (X, d) *metrischer Raum* und d heißt *Metrik* auf X.

Satz 1 Sei (X, d) ein halbmetrischer Raum. Dann gilt:

1. $\forall \quad x, y \in X : \qquad d(x,y) \geq 0,$
2. (*Vierecksungleichung*)

$$|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(y,v) \qquad (x, y, u, v \in X).$$

Def. 5 Sei (X, d) ein halbmetrischer Raum, $r > 0$ und $x \in X$. Dann heißen

$$K(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}, \quad \bar{K}(x,r) := \{y \in X : d(y,x) \leq r\}$$

offene und *abgeschlossene Kugel* um x mit Radius r. Das System $\mathcal{T}_d$ aller Teilmengen $T \subseteq X$ mit

$$\forall \quad x \in T \quad \exists \quad r > 0 : \quad K(x,r) \subseteq T$$

heißt die von d *erzeugte* Topologie.

Bem. Ist (X, d) ein halbmetrischer Raum, so wird durch

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad d(x,y) = 0$$

eine Äquivalenzrelation definiert, die $X/_\sim$ mit

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(x,y)$$

zu einem metrischen Raum macht.

Def. 6 Sei X eine Menge und d_λ $(\lambda \in \Lambda)$ eine Menge von Halbmetriken auf X mit

$$\forall \quad x, y \in X: \qquad d_\lambda(x,y) = 0 \ (\lambda \in \Lambda) \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

Dann heißt $(X, (d_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ *polymetrischer Raum*. Das System $\mathcal{T}$ aller Teilmengen von X, die zu jedem x den Durchschnitt endlich vieler offener Kugeln

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{y \in X : d_{\lambda_i}(x,y) < r_i\}$$

enthalten, heißt *natürliche Topologie* auf dem Raum $(X, (d_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$.

Bem.

- Die natürliche Topologie eines polymetrischen Raums ist HAUSDORFFsch.
- Ist $|\Lambda| = 1$ ist $(X, (d_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ ein metrischer Raum.
- Ist $|\Lambda| < \infty$, so erzeugt bereits die Metrik

  $$d : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d(x,y) := \max_{\lambda\in\Lambda} d_\lambda(x,y)$$

  die natürliche Topologie.

Bsp. Sei ω der Raum aller Folgen in $\mathbb{R}$ und

$$d_n : \omega \times \omega \to \mathbb{R}, \qquad d_n(x,y) = |x_n - y_n| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann ist $(\omega, (d_n)_{n\in\mathbb{N}})$ ein polymetrischer Raum. Die natürliche Topologie dieses Raums wird auch von der Metrik

$$d : \omega \times \omega \to \mathbb{R}, \qquad d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

erzeugt.

3 Vollständige Räume

Def. 7 Sei $(X, (d_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ ein polymetrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X.

1. (x_n) heißt *konvergent* gegen $x \in X$, falls gilt

   $$\forall \quad \lambda \in \Lambda \quad \forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \quad n \geq n_0 : \qquad d_\lambda(x_n, x) < \varepsilon.$$

   In diesem Fall schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} = x$.

2. (x_n) heißt CAUCHY-*Folge*, falls gilt:

   $$\forall \quad \lambda \in \Lambda \quad \forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \quad m, n > n_0 : \qquad d_\lambda(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Bem.

- Jede konvergente Folge ist eine CAUCHY-Folge.

- Räume oder Teilmengen von Räumen, in denen jede CAUCHY-Folge konvergent ist, heißten *(folgen-)vollständig*.

Def. 8 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$. Dann heißt

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

der *Durchmesser* von A.

Satz 2 (CANTORscher Durchschnittssatz) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen des vollständigen metrischen Raums (X, d) mit

$$A_{n+1} \subseteq A_n \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0,$$

so enthält $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ genau einen Punkt.

Satz 3 Sei (X_0, d_0) ein metrischer Raum, (X_1, d_1) ein vollständiger metrischer Raum, $A \subseteq X_0$ und $f : A \to X_1$ gleichmäßig stetig. Dann gilt: Es gibt genau eine auf $\operatorname{cl}(A)$ stetige Funktion $F : \operatorname{cl}(A) \to X_1$ mit $f(x) = F(x)$ $(x \in A)$. Diese ist auf $\operatorname{cl}(A)$ gleichmäßig stetig.

Satz 4 Zu jedem metrischen Raum (X, d) gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten vollständigen metrischen Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ und eine Abbildung $E : X \to \tilde{X}$ mit

1. $(E(X), \tilde{d})$ ist isometrisch zu (X, d),
2. $E(X)$ liegt dicht in $\tilde{X}$.

4 Der BANACHsche Fixpunktsatz

Def. 9 Seien $(X_0, d_0), (X_1, d_1)$ metrische Räume und $f : X_1 \to X_2$ derart, daß für ein $L \in \mathbb{R}$ gilt

$$\forall \quad x, y \in X_0 : \qquad d_1(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_0(x, y).$$

Dann heißt f LIPSCHITZ-*stetig* und L heißt LIPSCHITZ-*Konstante*. Falls man im Fall $X_0 = X_1, d_0 = d_1$ ein $L < 1$ findet, das obige Bedingung erfüllt, so heißt f speziell *Kontraktion*.

Satz 5 (BANACHscher Fixpunktsatz) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \emptyset$ und $f : X \to X$ eine Kontraktion mit LIPSCHITZ-Konstante L. Dann gibt es genau einen *Fixpunkt*, d. h. genau einen Punkt $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = x_0$. Für diesen gelten

$$\forall \quad x \in X : \qquad x_0 = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$$

sowie die *Fehlerabschätzungen*

$$d(f^n(x), x_0) \leq \frac{1}{1-L} d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq \frac{L^n}{1-L} d(f(x), x).$$

Bem. Die Folge $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, für festes $x \in X$ rekursiv definiert durch

$$f^1(x) = f(x), \qquad f^n(x) := f^{n-1}(x)$$

heißt die Folge der *sukzessiven Approximationen* zum *Startwert* x.

5 Der Bairesche Kategoriensatz

Def. 10 Sei X ein topologischer Raum.

1. $A \subseteq X$ heißt *nirgends dicht*, wenn gilt $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A)) = \emptyset$.
2. Ist $A \subseteq X$ abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen, so heißt A von *erster Kategorie*, sonst von *zweiter Kategorie*.

Bem.

- Teilmengen nirgends dichter Mengen sind nirgends dicht.
- Teilmengen und abzählbare Vereinigungen von Mengen erster Kategorie sind von erster Kategorie.

Satz 6 (Satz von Baire) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $X \neq \emptyset$. Dann enthält keine Menge von erster Kategorie einen inneren Punkt. Insbesondere gilt: Jede nichtleere offene Menge ist von zweiter Kategorie.

Bsp. Ist $A \subseteq X$ von erster Kategorie, so liegt $X \setminus A$ dicht in X: Andernfalls enthielte A eine offene Kugel, wäre also nicht von erster Kategorie. Wäre $X \setminus A$ von erster Kategorie, so auch X.

6 Der Satz von Osgood

Satz 7 (Satz von Osgood) Sei (X, d) vollständig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise beschränkte Folge stetiger Funktionen $X \to \mathbb{R}$. Dann existiert eine Kugel K, auf der $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt ist.

Satz 8 Sei (X, d) vollständig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge stetiger Funktionen $X \to \mathbb{R}$. Die Grenzfunktion sei $f : X \to \mathbb{R}$. Dann gilt: Die Menge der Unstetigkeitspunkte von f ist von erster Kategorie, die Menge ihrer Stetigkeitspunkte also insbesondere dicht und von zweiter Kategorie.

7 Kompaktheit

Def. 11 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$.

1. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ heißt (*offene*) *Überdeckung* von A, falls gilt
$$A \subseteq \bigcup_{S\in\mathcal{S}} S.$$
2. Genügen von jeder offenen Überdeckung $\mathcal{S}$ von A endlich viele Mengen $S \in \mathcal{S}$ zur Überdeckung von A, so heißt A *kompakt*.
3. A heißt *relativ kompakt*, falls $\operatorname{cl}(A)$ kompakt ist.

4. A heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge in A eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in A liegt.

5. A heißt FRECHET-*kompakt*, falls jede unendliche Teilmenge von A einen Häufungspunkt in A hat.

Bem. Jede kompakte Teilmenge eines HAUSDORFF-Raums ist FRECHET-kompakt und abgeschlossen, im allgemeinen aber nicht folgenkompakt.

Satz 9 Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist kompakt

2. A ist folgenkompakt

3. A ist FRECHET-kompakt

Satz 10 Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ kompakt, so ist A separabel und vollständig.

Satz 11 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt: A ist genau dann kompakt, wenn A vollständig und totalbeschränkt ist.

8 Der Fortsetzungssatz von HAHN-BANACH

Im folgenden bezeichne E einen rellen oder komplexen Vektorraum. Die Begriffe aus der Linearen Algebra werden vorausgesetzt.

Def. 12 Sei E ein reeller Vektorraum und $p : E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit

1. $\forall \quad x, y \in E : \qquad p(x + y) \leq p(x) + p(y),$

2. $\forall \quad x \in E \quad \forall \quad \lambda \geq 0 : \qquad p(\lambda x) = \lambda p(x).$

Dann heißt p *sublineares Funktional*.

Satz 12 (Satz von HAHN-BANACH) Ist E ein reeller Vektorraum, $p : E \to \mathbb{R}$ sublinear, $M \subseteq E$ ein Untervektorraum von E und $\varphi : M \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit $\varphi(x) \leq p(x)$ $(x \in M)$, so gibt es ein lineares Funktional $\bar{\varphi} : E \to \mathbb{R}$ mit

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) \quad (x \in M), \qquad \bar{\varphi}(x) \leq p(x) \quad (x \in E).$$

Def. 13 Mengen $K \subseteq E$ mit

$$\forall \quad x, y \in K : \qquad x + y \in K, \qquad \forall \quad x \in K, \lambda \geq 0 : \qquad \lambda x \in K$$

heißen *Keil*. Keile K mit $K \cap (-K) = \emptyset$ heißen *Kegel*.

Bem.

- Jeder Keil ist konvex und enthält den Nullvektor.

- Ist p ein sublineares Funktional auf E, so ist

$$K = \{x \in K : p(x) \leq 0\}$$

ein Keil. Gilt für p zudem $\max\{p(x), p(-x)\} > 0$ $(x \neq 0)$, so ist dieses K ein Kegel.

- Ist K ein Kegel, so definiert

$$x \leq y \quad :\Longleftrightarrow \quad y - x \in K$$

eine Halbordnung auf E mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \forall \quad x, y, z \in E : \qquad & x \leq z \quad \Longrightarrow \quad x + z \leq y + z, \\ \forall \quad x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R} : \qquad & x \leq y, \lambda \geq 0 \quad \Longrightarrow \lambda x \leq \lambda y. \end{aligned}$$

- Ist $\leq$ eine Halbordnung mit den beiden obigen Eigenschaften, so heißt $(E, \leq)$ *geordneter* Vektorraum.

Def. 14 Sei $M \subseteq E$ und $x \in M$ mit

$$\forall \quad y \neq 0 \quad \exists \quad \varepsilon > 0 \quad \forall \quad \alpha \in E : \qquad |\alpha| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad x + \alpha y \in M.$$

Dann heißt x *interner* Punkt von M.

Bem.

- Ist $C \subseteq E$ konvex, $x, y \in C$, x interner Punkt von C und $\lambda \in [0, 1)$, so ist auch $(1 - \lambda)x + \lambda y$ interner Punkt von C.

- Die Menge der internen Punkte einer konvexen Menge ist konvex.

- Ist 0 interner Punkt eines Keils K, so gilt $K = E$.

- $M \subseteq E$ heißt *lineare abgeschlossen*, wenn $\{\lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda y \in M\}$ für alle $x, y \in E$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist.

Satz 13 Ist $K \subseteq E, K \neq E$ ein Keil mit wenigstens einem internen Punkt x_0, so existiert ein sublineares Funktional p mit:

1. $\forall \quad x \in K : \qquad p(x) \leq 0,$

2. x ist genau dann interner Punkt von K wenn $p(x) < 0$ ist.

Ist K auch linear abgeschlossen, dann gilt für p zusätzliche

$$\max\{p(x), p(-x)\} > 0 \quad (x \neq 0).$$

Bem. Ist E reell und $C \subseteq E$ konvex, so ist

$$K(C) := \{\lambda c : c \in C, \lambda \geq 0\}$$

der kleinste Keil, der C enthält.

Satz 14 Ist E reell, $C \subseteq E$ konvex mit wenigstens einem internen Punkt c_0, und ist x_0 nicht interner Punkt von C, so existiert ein lineares Funktional $\varphi \neq 0$, so daß für $c \in C$ gilt $\varphi(c) \leq \varphi(x_0)$ und für alle internen Punkte $c \in C$ gilt $\varphi(c) < \varphi(x_0)$.

Satz 15 (Trennungssatz von HAHN-BANACH) Seien C und D konvexe Teilmengen des reellen Vektorraums E. C enthalte interne Punkte, von denen keiner auch in D liege. Dann gibt es eine Hyperebene, die C und D trennt, d. h. es gibt ein lineares Funktional $\varphi \neq 0$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(c) \leq \alpha \leq \varphi(d) \qquad (c \in C, d \in D).$$

Für die internen Punkte von C ist das erste Ungleichungszeichen echt.

Satz 16 Sei E ein komplexer Vektorraum, p sublinear und $\Phi_0 : M \to \mathbb{C}$ linear mit

$$\operatorname{Re} \Phi_0(x) \leq p(x) \qquad (x \in M).$$

Dann gibt es eine Fortsetzung $\Phi : E \to \mathbb{C}$ von Φ_0 mit

$$\operatorname{Re} \Phi(x) \leq p(x) \qquad (x \in M).$$

9 Halbnormen und Normen

Def. 15

1. Eine Abbildung $p : E \to \mathbb{R}$ mit

   (a) $\forall \quad x, y \in E : \qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$,

   (b) $\forall \quad x \in E, \lambda \text{ skalar} : \qquad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

   heißt *Halbnorm*. Gilt ferner

   $$\forall \quad x \in E : \qquad p(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0,$$

   so heißt p *Norm*. In diesem Fall heißt (E, p) *normierter* Raum.

2. Ist ein normierter Raum als metrischer Raum vollständig, so heißt er BANACH-Raum.

Bem.

- Für die Norm $p(x)$ von x schreibt man typischerweise $||x||$.
- Ist p eine (Halb-)Norm, so wird durch

  $$d : E \times E \to \mathbb{R}, \qquad d(x, y) := p(x - y)$$

  eine (Halb-)metrik definiert.

- Ist auf E ein System $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Halbnormen mit

$$p_\lambda(x) = 0 \ (\lambda \in \Lambda) \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

  gegeben, so heißt $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ *polynormierter* oder *lokalkonvexer topologischer* Vektorraum. Die natürliche Topologie eines solchen ist definiert als die natürliche Topologie der zugehörigen Halbnormen.

- Das die Topologie erzeugende Halbnormensystem heißt *saturiert*, wenn für je endlich viele $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ die Halbnorm $p(x) = \max_j p_{\lambda_j}(x)$ zu $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ gehört. Zu jedem polynormierten Raum existiert ein saturiertes Halbnormensystem, das dieselbe Topologie erzeugt und dessen Indexmenge die gleiche Mächtigkeit hat wie das vorgegebene.

Bsp.

- Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $C(\Omega)$ der Vektorraum der auf Ω stetigen reellwertigen Funktionen. Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ ist

$$p_K(f) := \max_{x\in K} |f(x)|$$

  eine Halbnorm, und $(C(\Omega), (p_K)_K)$ ist ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Konvergenz in der zugehörigen Topologie bedeutet gleichmäßige Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge von Ω. $C(\Omega)$ ist unter dieser Topologie folgenvollständig und metrisierbar.

- $(C(\Omega), (p_x)_{x\in\Omega})$ mit

$$p_x(f) := |f(x)|$$

  ist ebenfalls ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, die von ihm erzeugte Topologie ist gröber als die von vorher.

- $H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ ganz}\}$ ist ein komplexer Vektorraum, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$p_n(f) := \max_{|z|\leq n} |f(z)|$$

  eine Norm.

- Ist X ein kompakter metrischer Raum, so ist $C(X)$ mit

$$||f|| = \max_{x\in X} |f(x)|$$

  ein Banach-Raum.

- Ist E ein Vektorraum und p eine Halbnorm, so ist $\operatorname{Kern} p = \{x : p(x) = 0\}$ ein Untervektorraum und auf ${}^{E}\!/_{N}$ wird durch

$$||\tilde{x}|| = p(x) \qquad (x \in \tilde{x})$$

  eine Norm definiert.

- Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar, $1 \leq p \leq \infty$, E^p der Vektorraum aller meßbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, für die $|f|^p$ integrierbar ist, und

$$P(f) := \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

  Dann ist P eine Halbnorm auf E^p und obige Konstruktion liefert den Banach-Raum $L^p(\Omega)$.

10 Der topologische Dualraum

Satz 17 Ist $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ ein polynormierter Raum und $p : E \to \mathbb{R}$ sublinear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. p ist stetig
2. p ist im Nullpunkt stetig
3. p ist auf einer offenen nichtleeren Menge nach oben beschränkt
4. p ist auf einer offenen Umgebung von Null nach oben beschränkt

Satz 18 Die Menge der auf einem polynormierten Raum $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ stetigen linearen Funktionen ist bezüglich punktweiser Addition und skalarer Multiplikation ein Vektorraum.

Bem. Der Vektorraum aus obigem Satz heißt *topologischer Dualraum* und wird mit E^* bezeichnet.

Def. 16

1. Sei $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ ein polynormierter Raum und $B \subseteq E$. B heißt *beschränkt*, wenn jedes p_λ $(\lambda \in \Lambda)$ auf B beschränkt ist.
2. Zu $B \subseteq E$ beschränkt sei p_B die durch
$$p_B(\varphi) := \sup_{x\in B} |\varphi(x)|$$
definierte Halbnorm auf E^*. Der polynormierte Raum $(E^*, (p_B)_B)$ heißt *starker Dualraum* von E, die von ihm erzeugte Topologie heißt *starke Topologie*.
3. Zu $x \in E$ sei p_x die durch
$$p_x(\varphi) := |\varphi(x)|$$
definierte Halbnorm auf E^*. Die zum polynormierten Raum $(E^*, (p_x)_{x\in E})$ gehörige Topologie heißt *schwach*-Topologie* auf E^*.

Bem. Die schwach*-Topologie ist gröber oder gleich der starken Topologie.

Satz 19 Für einen normierten Raum $(E, ||\cdot||)$ wird durch
$$||\varphi||^* := \sup_{||x||\leq 1} |\varphi(x)|$$
eine Norm $||\cdot||^*$ auf E^* erklärt, die die starke Topologie erzeugt. $(E^*, ||\cdot||^*)$ ist ein Banach-Raum.

Satz 20 In einem polynormierten Raum $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ sind die Auswertungsfunktionale genau die schwach*-stetigen Funktionale.

Satz 21 Ist $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, so ist der Raum der schwach*-stetigen linearen Funktionale auf E^* linear isometrisch zu E.

Bem. Statt $||\cdot||^*$ schreiben wir auch einfach $||\cdot||$.

11 Der Satz von ALAOGLU-BOURBAKI

Satz 22 (Satz von ALAOGLU-BOURBAKI) Sei $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ ein polynormierter Raum, U eine offene Umgebung von Null. Dann ist die durch

$$U^\circ := \{\varphi \in E^* : |\varphi(x)| \leq 1 \ (x \in U)\}$$

definierte *Polare* U° von U schwach*-kompakt.

12 Der Satz von KREIN-MILMAN

Def. 17 Sei $M \subseteq E$.

1. $S \subseteq M$ heißt *extremale* Teilmenge von M, falls alle $x, y \in M$, für die ein $\lambda \in (0,1)$ mit $(1-\lambda)x + \lambda y \in S$ existiert, bereits in S liegen.

2. $m \in M$ heißt *extremal*, falls $\{m\}$ extremal ist.

Bem.

- Die extremalen Punkte einer konvexen Menge sind genau jene, die weggelassen werden können ohne die Konvexität zu zerstören.

- Die extremalen Punkte einer konvexen Menge sind genau jene, die sich nicht als echte Konvexkombination zweier verschiedener Punkte der Menge darstellen lassen.

- Der Schnitt extremaler Mengen ist extremal oder leer.

Satz 23 (Satz von KREIN-MILMAN) Sei $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ ein polynormierter Raum, $C \subseteq E$ kompakt und konvex. Dann ist C gleich der abgeschlossenen Hülle der Menge ihrer Extremalpunkte.

13 Das Lemma von RIESZ

Satz 24 (Lemma von RIESZ) Sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und $F \subsetneq E$ ein abgeschlossener Teilraum von E. Es sei d mit $d(x,y) := ||x-y||$ die zu $(E, ||\cdot||)$ gehörige Metrik. Dann gilt:

$$\sup_{||x||=1} d(x, F) = 1.$$

Bem.

- Ist E endlichdimensional, so ist das Supremum im obigen Satz ein Maximum.

- Ist E unendlichdimensional, so ist existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $||x_n|| = 1$ und $||x_n - x_m|| \geq 1$ $(n \neq m)$. Daraus folgt insbesondere, daß in keinem unendlichdimensionalen normierten Raum die Einheitskugel totalbeschränkt oder gar kompakt sein kann.

14 Die schwache Topologie

Def. 18 Sei $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ polynormiert und E^* der Dualraum von E. Die Halbnormen p_φ mit

$$p_\varphi(x) = |\varphi(x)| \qquad (\varphi \in E^*)$$

definieren den polynormierten Raum $(E, (p_\varphi)_{\varphi\in E^*})$. Die zu diesem Raum gehörige Topologie heißt *schwache* Topologie.

Bem. Die schwache Topologie ist gröber als die zu $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ gehörige Topologie.

Satz 25 Der topologische Dualraum von $(E, (p_\varphi)_{\varphi\in E^*})$ ist E^*.

Satz 26 Ist $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ polynormiert und $C \subseteq E$ konvex, so ist die schwach abgeschlossene Hülle von C gleich der abgeschlossenen Hülle von C.

Bem. Folgerung: Ist $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ polynormiert, Λ höchstens abzählbar und konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen x, so existiert eine Folge von Konvexkombinationen der x_n, die gegen x konvergiert.

Satz 27 Ist $K = K_{p_\lambda}(0,1)$ und K° mit

$$K^\circ := \{\varphi \in E^* : |\varphi(x)| \leq 1 \ (x \in K)\}$$

die Polare von K, so gilt

$$\mathrm{cl}(K) = \{x \in E : |\varphi(x)| \leq 1 \ (\varphi \in K^\circ)\}.$$

Satz 28 Ist C eine kompakte konvexe Teilmenge eines polynormierten Raums $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ und Φ eine Familie von auf C punktweise beschränkten linearen Funktionalen, so ist Φ auf C gleichmäßig beschränkt.

Satz 29 Ist $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ polynormiert, so ist $M \subseteq E$ genau dann beschränkt, wenn M schwach beschränkt ist.

Bem.

- Beschränktheitskriterium von BANACH: Die Teilmenge $M \subseteq E$ ist genau dann beschränkt, wenn aus $x_n \in M$, $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ folgt $\lambda_n x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
- Jeder unendlichdimensionale Raum ist in seiner schwachen Topologie von erster Kategorie.

15 Innenprodukträume und HILBERT-Räume

Def. 19 Sei E ein komplexer Vektorraum. Und $B : E \times E \to \mathbb{C}$ eine Abbildung.

1. B heißt *Sesquilinearform*, falls B in der ersten Variablen linear ist und $B(x,y) = \overline{B(y,x)}$ $(x, y \in E)$ gilt.

2. Eine Sesquilinearform heißt *positiv semidefinit*, wenn $B(x,x) \geq 0$ $(x \in E)$ gilt, *positv definit*, wenn $B(x,x) > 0$ $(x \neq 0)$ gilt.

3. Eine positiv semidefinite, reellwertige Sequilinearform heißt *Semi-Innenprodukt*, eine positiv definite, reellwertige Sesquilinearform heißt *Innenprodukt*.

4. Ist B ein Innenprodukt, so heißt (E, B) *Innenproduktraum*.

5. Ein topologisch vollständiger Innenproduktraum heißt HILBERT-*Raum*.

Bem.

- Ist E reell, so wird B als reellwertig angenommen. Eine Sesquilinearform ist in diesem Fall bilinear und symmetrisch.
- Statt $B(x,y)$ schreibt man auch (x,y).
- Statt $(E, (\cdot,\cdot))$ schreibt man auch einfach E.

Satz 30 Sei E ein Vektorraum und $(\cdot,\cdot)$ ein Semi-Innenprodukt auf E. Dann gilt:

1. Die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung:

$$\forall \quad x,y \in E: \qquad |(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn Skalare λ_0, μ_0 mit $|\lambda_0| + |\mu_0| > 0$ existieren, so daß gilt $(\lambda_0 x + \mu_0 y, \lambda_0 x + \mu_0 y) = 0$.

2. Durch $||x|| := \sqrt{(x,x)}$ wird auf E eine Halbnorm definiert. Ist $(\cdot,\cdot)$ ein Innenprodukt, so ist $||\cdot||$ eine Norm, die von $(\cdot,\cdot)$ *erzeugte* Norm.

3. Für die von $(\cdot,\cdot)$ erzeugte Norm $||\cdot||$ gelten die *Parallelogrammgleichung*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \qquad (x,y \in E)$$

sowie die Gleichungen

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 - ||x-y||^2 &= 4\,\mathrm{Re}(x,y) \qquad (x,y \in E), \\ ||x+\mathrm{i}y||^2 + ||x-\mathrm{i}y||^2 &= 4\,\mathrm{Im}(x,y) \qquad (x,y \in E). \end{aligned}$$

Satz 31 Ist $(E, (\cdot,\cdot))$ ein Innenproduktraum und $C \subseteq E$ konvex und vollständig bezüglich der von $(\cdot,\cdot)$ erzeugten Norm $||\cdot||$, so existiert zu jedem $x_0 \in E$ genau ein $c_0 \in C$ mit $||x_0 - c_0|| = \mathrm{dist}(x_0, C)$. Es gilt

$$\forall \quad c \in C: \qquad \mathrm{Re}(x_0 - c_0, c - c_0) \leq 0.$$

Ist C auch Untervektorraum von E, so gilt $(x_0 - c_0, c - c_0) = 0$ $(c \in C)$.

Def. 20 Sei $(\cdot,\cdot)$ ein Semi-Innenprodukt auf E.

1. $x, y \in E$ heißen zueinander *senkrecht*, falls gilt $(x,y) = 0$. Schreibweise in diesem Fall: $x \perp y$.

2. $M, N \subseteq E$ heißen zueinander *senkrecht*, falls gilt

$$\forall \quad m \in M, n \in N : \qquad m \perp n.$$

3. Zu $M \subseteq E$ ist $M^\perp$ definiert durch

$$M^\perp := \{x \in E : (x, m) = 0 \ (m \in M)\}.$$

   Statt $\{m\}^\perp$ schreibt man auch $m^\perp$.

Bem.

- $F^\perp$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von E.
- Ist $(E, (\cdot,\cdot))$ ein HILBERT-Raum, F ein abgeschlossener Teilraum von E, so gilt $E = F \oplus F^\perp$.

Satz 32 Sei E ein HILBERT-Raum und $\varphi \in E^*$. Dann existiert genau ein $y \in E$ mit

$$\varphi(x) = (x, y) \qquad (x \in E).$$

Ferner gilt $||\varphi|| = ||y||$.

Bem. Die Zuordnung $S : \varphi \to y$ ist isometrisch, additiv, und es gilt $S(\lambda\varphi) = \overline{\lambda} S(\varphi)$. Im reellen Fall ist also der Dualraum E^* linear isometrisch zu E, also insbesondere selbst wieder ein HILBERT-Raum. Im komplexen Fall erzeugt $(\varphi, \psi) = (S(\psi), S(\varphi))$ die Norm im Dualraum; er ist ebenfalls ein HILBERT-Raum.

Def. 21 Sei E ein Innenproduktraum. $B \subseteq E$ heißt *Orthonormalsystem*, falls für $b, b' \in B$ gilt

$$(b, b') = \begin{cases} 1 & \text{falls } b = b' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein Orthonormalsystem B heißt (*Orthonormal-*)*Basis* von E, wenn gilt

$$\mathrm{cl}(\mathrm{span}(B)) = E.$$

Satz 33 (BESSELsche Ungleichung) Ist E ein Innenproduktraum, $B \subseteq E$ orthonormal und $x \in E$, so gilt für jede Wahl endlich vieler $b_1, \ldots, b_n \in B$ die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{k} |(x, b_j)|^2 \leq ||x||^2.$$

Insbesondere ist $(x, b) \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $b \in B$.

Def. 22 Sei E ein Innenproduktraum, $x \in E$ und $B \subseteq E$ ein Orthonormalsystem. Weiter sei $B_x := \{b \in B : (x, b) \neq 0\}$ und $b_1, b_2, \ldots$ eine Aufzählung von B_x. Dann heißt

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x, b_j) b_j$$

die zur Aufzählung $b_1, b_2, \ldots$ gehörige FOURIER-*Reihe* von x.

Bem. Wenn die FOURIER-Reihe für eine Abzählung von B_x konvergiert, dann konvergiert sie für jede Abzählung, und zwar immer gegen den selben Wert. Dieser sei mit

$$S(x) := \sum_{b \in B} (x, b) b$$

bezeichnet.

Satz 34 Sei E ein HILBERT-Raum, B ein Orthonormalsystem, $F := \operatorname{cl} \operatorname{span} B$, P die Orthogonalprojektion auf F und $x \in E$. Dann gelten

$$P(x) = \sum_{b \in B} (x, b) b$$

sowie die PARSEVAL*sche Gleichung*

$$||P(x)||^2 = \sum_{b \in B} |(x, b)|^2.$$

Bem.

- Gilt unter den Voraussetzungen des obigen Satzes zusätzlich $B^\perp = \{0\}$, so ist $P(x) = x$, B also Orthonormalbasis.
- Ferner gilt:
$$(P(x), P(y)) = \sum_{b \in B} (x, b) \overline{(y, b)}.$$

Satz 35 Jedes Orthonormalsystem eines HILBERT-Raums H läßt sich zu einer Orthonormalbasis ergänzen.

Bem. Ist $F \subseteq H$ ein Untervektorraum von H und φ ein stetiges lineares Funktional auf F, so ist die stetige lineare Fortsetzung ϕ mit gleicher Norm eindeutig bestimmt und von der Form

$$\phi(x) = (x, y) = \varphi(P(x))$$

mit $y \in \operatorname{cl}(F)$. Dabei ist P die Orthogonalprojektion auf F.

16 Stetige lineare Abbildungen

Def. 23 Seien E, F Vektorräume über dem selben Skalarkörper, und $T : E \to F$ eine Abbildung. T heißt *linear*, falls für alle $x, y \in E$ und alle Skalare λ, μ gilt

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

Bem. Für lineare Abbildungen $T : E \to F$ gelten:

- $T(0) = 0$
- Ist $M \subseteq E$ Untervektorraum [konvex], so ist $T(M)$ Untervektorraum [konvex].

- Ist $N \subseteq F$ Untervektorraum [konvex], so ist $T^{-1}(N)$ Untervektorraum [konvex].
- $T(E)$ ist Untervektorraum von F und $T^{-1}(0) = \operatorname{Kern} T$ Untervektorraum von E.

Satz 36 Es seien $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ und $(F, (q_\mu)_{\mu\in M})$ polynormiert und $T : E \to F$ linear. Dann gelten:

1. T ist entweder in jedem Punkt stetig oder nirgends. Ist T stetig, dann ist T auch gleichmäßig stetig, d. h. zu jeder Nullumgebung V in F gibt es eine Nullumgebung U in E mit

$$x - y \in U \quad \Longrightarrow \quad T(x) - T(y) \in V.$$

2. T ist genau dann stetig, wenn für jedes $\mu \in M$ die Halbnorm q, definiert durch

$$q(x) := q_\mu(T(x))$$

auf E stetig ist.

3. T ist genau dann stetig, wenn zu jedem $\mu \in M$ endlich viele $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Lambda$ und nichtnegative Zahlen $c_1, \dots, c_k$ existieren mit

$$q_\mu(T(x)) \leq \sum_{j=1}^{k} c_j p_{\lambda_j}(x) \qquad (x \in E).$$

Bem. Sind E und F beide normiert, so ist die lineare Abbildung T genau dann stetig, wenn eine nichtnegative Konstante c existiert mit

$$||T(x)|| \leq c||x|| \qquad (x \in E).$$

Die kleinste derartige Konstante heißt die (*Operator-*)*Norm* $|||T|||$ von T.

Satz 37 Seien $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ und $(F, (q_\mu)_{\mu\in M})$ polynormiert und $T : E \to F$ linear und stetig. Dann ist T beschränkt, d. h. das Bild jeder beschränkten Teilmenge von E ist beschränkt.

Bem. Allerdings reicht Beschränktheit im Allgemeinen für die Stetigkeit nicht aus: Ist etwa F ein unendlichdimensionaler normierter Raum und wählt man für E denselben Raum F mit der schwachen Topologie, so ist die Identität beschränkt, aber nicht stetig.

Satz 38 Seien $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ und $(F, (p_\mu)_{\mu\in M})$ polynormiert, Λ abzählbar und $T : E \to F$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. T ist stetig
2. T ist beschränkt
3. Für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt
4. Für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

17 Der Satz von BANACH-STEINHAUS

In diesem Abschnitt seien $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ und $(F, (q_\mu)_{\mu\in M})$ polynormierte Räume über dem gleichen Skalarkörper. $(T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ sei eine Familie stetiger linearer Abbildungen von E nach F.

Bem.

- $(T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ heißt *gleichgradig stetig*, wenn zu jeder Nullumgebung $V \subseteq F$ eine Nullumgebung $U \subseteq E$ existiert mit
$$T_\gamma(U) \subseteq V \qquad (\gamma \in \Gamma).$$
- Jede gleichgradig stetige Familie linearer Abbildungen ist *gleichmäßig beschränkt*, d. h. zu jeder beschränkten Menge $M \subseteq E$ existiert eine beschränkte Menge $N \subseteq F$ mit $T_\gamma(M) \subseteq N$ $(\gamma \in \Gamma)$.
- Jede gleichmäßig beschränkte Familie linearer Abbildungen ist *punktweise beschränkt*, d. h. alle Mengen $\{T_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\}$ $(x \in E)$ sind beschränkt.

Satz 39 (Satz von BANACH-STEINHAUS) Sei $M \subseteq E$ von zweiter Kategorie und $(T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ auf M punktweise beschränkt. Dann gilt: $(T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ist auf E punktweise beschränkt und gleichgradig stetig, also insbesondere auch gleichmäßig beschränkt.

Bem. Die Voraussetzungen des obigen Satzes sind z. B. erfüllt, wenn E vollständig metrisierbar und $M \subseteq E$ eine Menge mit nichtleerem Inneren ist. Ist speziell E ein BANACH-Raum und F normiert, so folgt aus
$$\sum_{\gamma\in\Gamma} ||T_\gamma(x)|| < \infty \qquad (||x|| \leq 1),$$
daß eine Konstante C existiert mit
$$|||T_\gamma||| \leq C \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

Satz 40 Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger linearer Abbildungen von E nach F. Dann gilt:

1. Wenn
$$C = \{x \in E : (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist CAUCHY-Folge}\}$$
von zweiter Kategorie in E ist, dann ist $C = E$.
2. Ist F vollständig metrisierbar und
$$K = \{x \in E : (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent}\}$$
von zweiter Kategorie in E, so existiert $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ für alle $x \in E$ und T ist linear und stetig.

Bem.

- Ist $(E,(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ vollständig metrisierbar und existiert $T(x)=\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ für alle x aus einer Menge zweiter Kategorie, so exisitiert dieser Limes überall und T ist linear und stetig.

- Ist $(E,(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ vollständig metrisierbar und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichgradig stetig, so ist die Menge der $x\in E$, für die $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, von erster Kategorie.

Bsp. Die Menge der auf $[-\pi,\pi]$ stetigen Funktionen, deren Fourier-Reihe für $t=0$ konvergiert, ist in $C([-\pi,\pi])$ von erster Kategorie. Bezüglich des Standardorthonormalsystems in $L^2([-\pi,\pi])$,

$$\varphi_0=\tilde\varphi_0=\frac{1}{2\sqrt{\pi}},\quad \varphi_k(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt,\quad \tilde\varphi_k(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt,$$

lautet die n-te Teilsumme der Fourier-Reihe für die Funktion x an der Stelle $t=0$

$$\begin{aligned}T_n(x)&=\sum_{k=0}^{n}\Big((x,\varphi_k)\varphi_k(0)+(x,\tilde\varphi_k)\tilde\varphi_k(0)\Big)\\&=\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\Big(\sum_{k=0}^{n}(\varphi_k(t)\varphi_k(0)+\tilde\varphi_k(t)\tilde\varphi_k(0))\Big)\,dt\\&=\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\,dt.\end{aligned}$$

Jedes T_n ist ein stetiges lineares Funktional auf $E=C([-\pi,\pi])$ (setze also $F=\mathbb{R}$), und es gilt

$$||T_n||=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\Big|\,dt.$$

Nach einiger Rechnung erhält man

$$||T_n||\geq\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\xrightarrow{n\to\infty}\infty.$$

Also ist $\{x:(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}\text{ konvergent}\}$ in E von erster Kategorie.

18 Der Satz von der offenen Abbildung

Def. 24 Seien $(E,(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ und $(F,(q_\mu)_{\mu\in M})$ polynormierte Räume über dem gleichen Skalarkörper. $T:E\to F$ sei linear, und für jede offene Teilmenge $M\subseteq E$ sei $T(M)$ offen in F. Dann heißt T *offen*.

Bem. Falls zu T die Umkehrabbildung T^{-1} exisitiert, ist Offenheit von T äquivalent zur Stetigkeit von T^{-1}.

Bsp. Sei $E = C([0,1])$ und $F = \{x \in C^1([0,1]) : x(0) = 0\}$, beide versehen mit der Maximumsnorm. Ferner sei

$$T : E \to F, \qquad T(x)(t) := \int_0^1 x(s)\, ds.$$

T ist linear, stetig und bijektiv, aber nicht offen: Zum Beispiel ist $0 \in T(K(0,1))$ kein innerer Punkt dieser Menge, da mit $x_n(t) = 2t^n$ zwar

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = 0$$

gilt, aber keine der Funktionen $T(x_n)$ ein Urbild in $K(0,1)$ hat.

Bem. Ist N ein Untervektorraum von E und p eine Halbnorm auf E, so ist $\tilde{p}$ mit

$$\tilde{p}(\tilde{x}) = \inf_{z\in N} p(x-z)$$

eine Halbnorm auf E/N. Ferner wird zu einer Halbmetrik d auf E durch

$$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) = \inf_{z\in N} d(x-y,z)$$

eine Halbmetrik $\tilde{d}$ erklärt.

Satz 41 Ist $N \subseteq E$ ein abgeschlossener Untervektorraum und bezüglich d vollständig, so ist auch E/N bezüglich $\tilde{d}$ vollständig.

Satz 42 Ist $(E,(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ polynormiert mit saturiertem Halbnormensystem und $N \subseteq E$ ein abgeschlossener Untervektorruum, so ist $(E/N, (\tilde{p}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ polynormiert und die kanonische Abbildung $\pi : E \to E/N$ stetig, surjektiv und offen. Ist Λ abzählbar und E folgenvollständig, dann auch E/N.

Satz 43 (Satz von der offenen Abbildung) Seien $(E,(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ und $(F,(q_\mu)_{\mu\in M})$ polynormierte Räume, Λ abzählbar. E sei folgenvollständig und $T : E \to F$ sei linear und stetig. Ferner sei $T(E)$ von zweiter Kategorie. Dann ist T surjektiv, offen und F ist folgenvollständig.

Bem.

- Sind E und F Banach-Räume und $T : E \to F$ stetig, linear und bijektiv, so existieren Konstanten $a, b > 0$ mit

$$a||x|| \le ||T(x)|| \le b||x|| \qquad (x \in E).$$

- Ist E ein Vektorraum und sind $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ zwei Normen, bezüglich denen E vollständig ist, und gilt $||x||_1 \le b||x||_2$ $(x \in E)$, so existiert $a > 0$ mit $a||x||_2 \le ||x||_1 \le b||x||_2$ $(x \in E)$.

19 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Bem.

- Sind X, Y HAUSDORFF-Räume und ist $f : X \to Y$ stetig, dann ist der *Graph*
$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$
von f in $X \times Y$ bezüglich der Produkttopologie abgeschlossen.

- Sind X, Y metrische Räume, so ist die Abgeschlossenheit von $\operatorname{graph}(f)$ äquivalent zu
$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$
falls diese Grenzwerte existieren.

Satz 44 (Satz vom abgeschlossenen Graphen) $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ und $(F, (q_\mu)_{\mu\in M})$ seien polynormierte Räume, Λ, M abzählbar und E, F vollständig. Dann gilt: $T : E \to F$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\operatorname{graph}(T)$ abgeschlossen ist.

Satz 45 (Satz von HELLINGER-TÖPLITZ) Ist E ein HILBERT-Raum und $T : E \to E$ symmetrisch, d. h. gilt
$$(T(x), y) = (x, T(y)) \qquad (x, y \in E),$$
dann ist T stetig.

Satz 46 Seien E, F BANACH-Räume, $T : E \to F$ linear und mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ gelte $\lim_{k\to\infty} T(x_k) = T(x)$ (schwach). Dann ist T stetig.

20 Dualität in polynormierten Räumen

Im folgenden steht x^* für ein Element von E^*, und statt $x^*(x)$ wird die Schreibweise $\langle x, x^*\rangle$ verwendet. Dann gelten also
$$||x^*|| = \sup\{|\langle x, x^*\rangle| : x \in E, ||x|| \le 1\},$$
$$||x|| = \sup\{|\langle x, x^*\rangle| : x^* \in E^*, ||x^*|| \le 1\}.$$

Def. 25

1. Zu $M \subseteq E$ heißt
$$M^\perp := \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = 0 \ (x \in M)\} \subseteq E^*$$
der *Annihilator* oder *Orthogonalraum* von M.

2. Zu $N \subseteq E^*$ sei ${}^\perp N$ definiert durch
$${}^\perp N = \{x \in E : \langle x, x^*\rangle = 0 \ (x^* \in N)\} \subseteq E.$$

Bem. $M^\perp$ und ${}^\perp N$ sind Untervektorräume von E^* bzw. E, und wegen

$$M^\perp = \big(\operatorname{span}(M)\big)^\perp, \quad {}^\perp N = {}^\perp\big(\operatorname{span}(N)\big)$$

kann man M, N o. B. d. A. als Untervektorräume ansehen.

Satz 47 Sei $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ polynormiert, M Untervektorraum von E, N Untervektorraum von E^*. Dann gelten

1. ${}^\perp(M^\perp) = \operatorname{cl}(M)$,
2. $({}^\perp N)^\perp = \operatorname{cl}^*(N)$,

wobei $\operatorname{cl}^*(N)$ den Abschluß in der schwach*-Topologie bezeichnet.

21 Der adjungierte Operator

In diesem Abschnitt seien $(E, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ und $(F, (q_\mu)_{\mu\in M})$ polynormierte Räume und $T : E \to F$ linear.

Def. 26 Sei $y^* \in F^*$ und $z^* \in E^*$ definiert durch

$$z^*(x) = \langle T(x), y^*\rangle \qquad (x \in E).$$

Dann heißt z^* das zu y^* *adjungierte* Element.

Bem. Jedes $y^* \in F^*$ hat höchstens ein adjungiertes Element. Die Menge $D^* \subseteq F^*$ derjenigen y^*, die ein adjungiertes Element besitzen, bildet einen Untervektorraum von F^* und die Zuordnung

$$y^* \mapsto z^* =: T^*(y^*)$$

ist linear. $T^* : D^* \to E^*$ heißt der zu T *adjungierte Operator*. Falls T stetig ist, gilt $D^* = F^*$ und $T^*(y^*) = y^* \circ T$.

Satz 48 Ist $D^* = F^*$, so ist T beschränkt. Sind E, F normiert, so sind T und T^* stetig und es gilt $|||T||| = |||T^*|||$.

Satz 49 Es gilt:

$$\operatorname{Kern}(T^*) = T(E)^\perp \subseteq F^*, \qquad \operatorname{Kern}(T) = {}^\perp(T^*(F^*)) \subseteq E.$$

Bem. $\operatorname{Kern}(T^*) \subseteq F^*$ ist wegen der Stetigkeit von T^* abgeschlossen in F^*. Er ist nach obigem Satz sogar schwach*-abgeschlossen in F^*. Wegen

$$\operatorname{Kern}(T)^\perp = ({}^\perp T^*(F^*))^\perp$$

ist $\operatorname{Kern}(T)^\perp$ der schwach*-Abschluß von $T^*(F^*)$. Ebenso ist ${}^\perp(\operatorname{Kern}(T^*))$ die abgeschlossene Hülle von $T(E)$.

Satz 50 Es gelten:

1. $T(E)$ liegt genau dann dicht in F, wenn T^* injektiv ist.

2. T ist genau dann injektiv, wenn $T^*(F^*)$ schwach*-dicht in E^* ist.

Satz 51 Seien E, F BANACH-Räume und $T : E \to F$ stetig und linear. K_E und K_F seien die offenen Einheitskugeln in E bzw. F. Dann gilt:

1. Aus $K_F \subseteq \operatorname{cl} T(K_E)$ folgt $K_F \subseteq T(K_E)$.
2. Aus $||T^*(y^*)|| \geq ||y^*||$ folgt $K_F \subseteq T(K_E)$.

Satz 52 Seien E, F BANACH-Räume, $T : E \to F$ stetig und linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $T(E)$ ist (norm-)abgeschlossen in F.
2. $T^*(F^*)$ ist schwach*-abgeschlossen in E^*.
3. $T^*(F^*)$ ist (norm-)abgeschlossen in E^*.

Bem. Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes gilt ferner:

$$T(E) = F \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, c > 0 \;\forall\, y^* \in F^* : \quad ||T^*(y^*)|| \geq c||y^*||.$$

22 Der Minimalmodul

In diesem Abschnitt seien E und F BANACH-Räume, $T : E \to F$ sei stetig und linear. Ferner seien

$$\tilde{E} = {}^{E}\!/_{\operatorname{Kern}(T)}, \quad ||\tilde{x}|| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Kern}(T)), \quad \tilde{T}(\tilde{x}) = T(x).$$

Def. 27 Die Zahl

$$\gamma(T) := \inf\{\frac{||T(x)||}{\operatorname{dist}(x, \operatorname{Kern}(T))} : x \in E, x \notin \operatorname{Kern}(T)\}$$

heißt *Minimalmodul* von T.

Bem. $\gamma(T)$ ist die größte Zahl mit der Eigenschaft $||T(x)|| \geq c||\tilde{x}||$ $(x \in E)$.

Satz 53 $T(E)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\gamma(T) > 0$ ist.

Bem. Folgerung: Besitzt $T(E)$ endlich viele Kodimensionen, so ist $T(E)$ abgeschlossen.

23 FREDHOLM-Operatoren

Def. 28 E und F seien BANACH-Räume, $T : E \to F$ sei linear und stetig, und es gelte

$$\dim \operatorname{Kern}(T) < \infty$$
$$\text{co-dim}\, T(E) = \dim {}^{F}\!/_{T(E)} < \infty.$$

Dann heißt T FREDHOLM-*Operator*. Die Zahl

$$\operatorname{ind}(T) := \dim \operatorname{Kern}(T) - \text{co-dim}\, T(E)$$

heißt *Index* von T.

Satz 54 Sei X ein BANACH-Raum, M ein abgeschlossener Teilraum von X und N schwach*-abgeschlossener Teilraum von X^*. Dann gilt:

$$M^\perp \cong \left({}^{X}\!/_{M} \right)^*, \qquad ({}^\perp N)^* \cong {}^{X^*}\!/_{N},$$

wobei $\cong$ für lineare Isometrie stehe.

Satz 55 E und F seien BANACH-Räume und $T : E \to F$ sei linear und stetig. Dann gilt: T ist genau dann FREDHOLM-Operator, wenn T^* ein solcher ist, und in diesem Fall gilt $\operatorname{ind}(T) = -\operatorname{ind}(T^*)$.

Satz 56 (Die FREDHOLMsche Alternative) E und F seien BANACH-Räume und $T : E \to F$ sei linear und stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $T(x) = y$
2. $y \in {}^\perp \operatorname{Kern}(T^*)$
3. Für alle Lösungen y von $T^*(y^*) = 0$ gilt $\langle y, y^* \rangle = 0$.

Ist x_0 eine Lösung, so ist die Gesamtheit der Lösungen gegeben durch $x_0 + \operatorname{Kern}(T)$, also durch einen affinen Teilraum endlicher Dimension.

Bem. Entsprechend ist $T^*(y^*) = x^*$ genau dann lösbar, wenn $\langle x, x^* \rangle = 0$ für alle $x \in \operatorname{Kern}(T)$ gilt, und die Gesamtheit der Lösungen ist ein affiner Teilraum von F^* endlicher Dimension. Der Index von T ist die Differenz der Dimensionen dieser Lösungsmannigfaltigkeiten.

Satz 57 E und F seien BANACH-Räume, $T \in \mathcal{LC}(E,F)$ bijektiv und $S \in \mathcal{LC}(E,F)$ derart, daß $|||T^{-1} \circ S||| < 1$ gilt. Dann ist $T + S$ bijektiv.

Satz 58 Die Menge $\Phi(E,F) \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ der FREDHOLM-Operatoren ist offen, und die Abbildung $\operatorname{ind} : \Phi(E,F) \to \mathbb{Z}$ ist stetig, also konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\Phi(E,F)$.

24 Kompakte Operatoren

Def. 29 Seien E, F normierte Räume, $T : E \to F$ linear und $T(K(0,1))$ relativ kompakt in F. Dann heißt T *kompakt*.

Bem.

- Da relativ kompakte Mengen beschränkt sind, ist jeder kompakte Operator stetig.
- Ist $T(E)$ endlichdimensional, so heißt T endlichdimensional.
- Jeder stetige, endlichdimensionale Operator ist kompakt.

Satz 59 Seien E, F normiert und $T : E \to F$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. T ist kompakt.
2. $T(B)$ ist relativ kompakt für jede beschränkte Teilmenge $B \subseteq E$.
3. Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Satz 60 (Satz von SCHAUDER) sind E und F normiert und ist $T : E \to F$ kompakt, so ist auch $T^* : F^* \to E^*$ kompakt. Ist F vollständig, so gilt auch die Umkehrung.

Satz 61 Ist E ein BANACH-Raum und $K : E \to E$ kompakt, so ist $\mathrm{id} - K$ ein FREDHOLM-Operator vom Index 0.

Satz 62 Seien E und F BANACH-Räume und $T \in \mathcal{LC}(E,F)$. Dann gilt: T ist genau dann FREDHOLM-Operator, wenn es $S_1, S_2 \in \mathcal{LC}(E,F)$ gibt, so daß $S_1T - \mathrm{id} : E \to E$ und $TS_2 - \mathrm{id} : F \to F$ kompakt sind.

Bem. Folgerung: Ist $T : E \to F$ FREDHOLM-Operator und $K : E \to F$ kompakt, dann ist $T + K$ FREDHOLM-Operator.

Index

A

Abbildung
- lineare . . . 16–17
- offene . . . 19–20
- stetige . . . 16–17

Abgeschlossenheit . . . 2
- lineare . . . 8

adjungiert . . . 22–23
Alaoglu-Bourbaki, Satz von . . . 12
Alternative, Fredholmsche . . . 24
Annihilator . . . 21
Approximation
- sukzessive . . . 5

Äußeres einer . . . 2

B

Baire, Satz von . . . 6
Banach-Steinhaus, Satz von . 18–19
Banachscher Fixpunktsatz . . . 5
- Fehlerabschätzungen . . . 5

Basis . . . 15
Beschränktheit . . . 11
- gleichmäßige . . . 18
- punktweise . . . 18

C

Cantorscher Durchschnittssatz . . . 5
Cauchy-Folge . . . 4

D

dicht . . . 3
Dualität . . . 21–22
Dualraum
- starker . . . 11
- topologischer . . . 11

Durchmesser . . . 5
Durchschnittssatz, Cantorscher . . . 5

E

erste Kategorie . . . 6
extremal . . . 12
Extremalpunkt . . . 12

F

Fixpunkt . . . 5
Fixpunktsatz, Banachscher . . . 5
- Fehlerabschätzungen . . . 5

Folge . . . 2
- Cauchy . . . 4

Folgenkompaktheit . . . 7
Folgenvollständigkeit . . . 5
Fortsetzungssatz . . . 7–9
Fourier-Reihe . . . 15
Fréchetkompaktheit . . . 7
Fredholm, Alternative von . . . 24
Fredholmoperator . . . 23–24
- Index . . . 23

Funktional
- sublineares . . . 7

G

gerichtet . . . 2
gleichgradig stetig . . . 18
Gleichung, Parsevalsche . . . 16
Graph . . . 21
- abgeschlossener . . . 21

H

Hahn-Banach, Satz von . . . 7–9
Halbmetrik . . . 3, 9
Halbnorm . . . 9–10
hausdorffsch . . . 3
Hellinger-Töplitz, Satz von . . . 21
Hilbert-Raum . . . 14
Hilbertraum . . . 13–16

I

Index . . . 23
Innenprodukt . . . 14
Innenproduktraum . . . 13–16
Inneres . . . 2
intern . . . 8

K

Kategorie
- erste . . . 6
- zweite . . . 6

Kegel . . . 7
Keil . . . 7
Kompaktheit . . . 6–7, 24–25
- Folgen- . . . 7
- Fréchet . . . 7
- relative . . . 6

Kontraktion . . . 5

Konvergenz . . . 4
Krein-Milman, Satz von . . . 12
Kugel . . . 3
  abgeschlossene . . . 3
  offene . . . 3

L

linear . . . 16
Lipschitzkonstante . . . 5

M

Menge
  abgeschlossene . . . 2
  Äußeres einer . . . 2
  Inneres einer . . . 2
  offene . . . 2
Metrik . . . 3–5, 9
  Halb- . . . 3, 9
Minimalmodul . . . 23

N

Netz . . . 2
nirgends dicht . . . 6
Norm . . . 9–10
  erzeugte . . . 14
  Operator- . . . 17

O

Offenheit . . . 2
Operator
  adjungierter . . . 22–23
  Fredholm- . . . 23–24
  kompakter . . . 24–25
Operatornorm . . . 17
Ordnung . . . 2
Orthogonalraum . . . 21
Orthonormalbasis . . . 15
Orthonormalsystem . . . 15
Osgood, Satz von . . . 6

P

Parallelogrammgleichung . . . 14
Polare . . . 12
Polymetrik . . . 4
positiv definit . . . 14
positiv semidefinit . . . 14
Punkt
  extremaler . . . 12
  interner . . . 8

R

Raum
  halbmetrischer . . . 3
  metrischer . . . 3–5
  normierter . . . 9
  polymetrischer . . . 4
Riesz, Lemma von . . . 12

S

Saturiertheit . . . 10
schwach*-Topologie . . . 11
Semi-Innenprodukt . . . 14
senkrecht . . . 14, 15
Sesquilinearform . . . 13
Startwert . . . 5
stetig
  gleichgradig . . . 18
Stetigkeit
  gleichgradige . . . 18
  Lipschitz- . . . 5
Sublinearität . . . 7

T

Teilmenge
  extremale . . . 12
Teilordnung . . . 2
Topologie . . . 2
  hausdorffsche . . . 3
  natürliche . . . 10
  schwache . . . 13
  starke . . . 11

U

Überdeckung . . . 6
Ungleichung
  Cauchy-Schwarzsche . . . 14
  Virecks- . . . 3

V

Vektorraum
  geordneter . . . 8
  lokalkonvexer . . . 10
  polynormierter . . . 10
  topologischer . . . 10
Viereckungleichung . . . 3
Vollständigkeit . . . 5
  folgen- . . . 5

Z

zweite Kategorie . . . 6