Analysis III

Manuel Kauers
nach einer Vorlesung von
Dr. G. Herzog

21. Oktober 2000

Inhaltsverzeichnis

19 Zusammenhängende Mengen und der Satz von Kneser 43

1 Integralsätze

Bem. Sei $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$. Dann gilt

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx.$$

D.h. das Integral über f' kann durch die Werte von f am Rand des Intervalls ausgedrückt werden. Die Sätze dieses Abschnitts sind Übertragungen dieses Sachverhalts in mehrere Dimensionen.

Def. 1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $f \in C^1(D,\mathbb{R}^p)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$. Dann heißt

$$\operatorname{div} f : D \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{div} f := D_1 f_1 + D_2 f_2 + \cdots + D_p f_p$$

die *Divergenz* von f. Ist $p = 3$, so heißt

$$\operatorname{rot} f : D \to \mathbb{R}^3, \qquad \operatorname{rot} f := (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1)$$

die *Rotation* von f.

Bem.

- Für $f \in C^2(D,\mathbb{R}^3)$ $(D \subseteq \mathbb{R})$ gilt $\operatorname{div}\operatorname{rot} f = 0$.
- Für $f \in C^2(D,\mathbb{R})$ $(D \subseteq \mathbb{R}^3)$ gilt $\operatorname{rot}\operatorname{div} f = 0$.

Def. 2 Es sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fest und $R : [0, 2\pi] \to (0, \infty)$ stückweise stetig differenzierbar mit $R(0) = R(2\pi)$. Dann heißt eine Menge B der Form

$$B := \{(x_0 + r \cdot \cos t, y_0 + r \cdot \sin t) : \ t \in [0, 2\pi], r \in [0, R(t)]\}$$

zulässig.

Bem.

- Zulässige Mengen sind kompakt.
- Zulässige Mengen sind z.B. Kreise, Ellipsen, Rechtecke, ...
- Für den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

  $$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) := (x_0 + R(t) \cdot \cos t, y_0 + R(t) \cdot \sin t)$$

  gilt $\partial B = \Gamma$. Anschaulich umläuft γ die Menge B im mathematisch positiven Sinn.
- Zu $(x, y) =: \gamma(t) \in \partial B$ heißt

  $$n(x, y) := \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{||(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))||}$$

  die *äußere Normale* an den Stellen $t \in [0, 2\pi]$, in denen γ differenzierbar ist.

Satz 1 (Integralsatz von GAUSS in der Ebene) Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ zulässig, $U \subseteq B$ offen und $f = (u, v) \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div} f(x,y) d(x,y) = \int_{\partial B} f(x,y) \cdot n(x,y) ds.$$

Dabei bezeichnet „$\int\limits_{\partial B}$" das Wegintegral über den zu B gehörigen Weg γ im Sinne obiger Bemerkung.

Bem.

- Setzt man speziell $u(x,y) = x$ und $v(x,y) = y$, so erhält man

  $$\lambda(B) = \int_B 1 d(x,y) = \frac{1}{2} \int_B (u_x(x,y) + v_y(x,y)) d(x,y) = \frac{1}{2} \int_{\partial B} x dy - y dx.$$

  Hieraus folgt z.B. für den Flächeninhalt der vom Weg

  $$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

  berandeten Ellipse B:

  $$\lambda(B) = \frac{1}{2} \int_\gamma x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ba \cos^2 t + ba \sin^2 t) dt = ab\pi$$

  $(a, b > 0)$.

- Satz 1 gilt allgemeiner für Bereiche B, deren Rand durch einen rektifizierbaren Weg im mathematisch positiven Sinn umlaufen wird.

Def. 3 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $K \subseteq D$ und

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$$

mit $\operatorname{Rang} \Phi' = 2$ auf D. Dann heißt Φ *Parameterdarstellung* der glatten Fläche $\mathcal{F} := \Phi(D)$ und $\Phi|_K$ *Parameterdarstellung* des Flächenstücks $\mathcal{F}_k := \Phi(K)$.

Bem.

- Es gilt

  $$\Phi' = \begin{pmatrix} D_1\Phi_1 & D_2\Phi_1 \\ D_1\Phi_2 & D_2\Phi_2 \\ D_1\Phi_3 & D_2\Phi_3 \end{pmatrix} =: (\Phi_x, \Phi_y)$$

  Wegen $\operatorname{Rang} \Phi' = 2$ sind Φ_x, Φ_y linear unabhängig. Sie sind geometrisch deutbar als *Tangentenrichtungen* an die Wege $\Phi(x, y_0)$ bzw. $\Phi(x_0, y)$ und bestimmen die *Tangentialebene*

  $$T(x_0, y_0) = \Phi(x_0, y_0) + [\Phi_x(x_0, y_0) + \Phi_y(x_0, y_0)]$$

  im Punkt $\Phi(x_0, y_0)$.

- Senkrecht auf dieser Ebene steht der *Normalenvektor*

$$n(x_0, y_0) := \frac{\Phi_x(x_0, y_0) \times \Phi_y(x_0, y_0)}{||\Phi_x(x_0, y_0) \times \Phi_y(x_0, y_0)||}$$

- Wichtiger Spezialfall: Ist $\varphi \in C^1(D, \mathbb{R})$ und $\Phi(x, y) := (x, y, \varphi(x, y))$, dann ist

$$\Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi_x(x, y) & \varphi_y(x, y) \end{pmatrix}$$

und damit

$$n = \frac{(-\varphi_x, -\varphi_y, 1)}{\sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2}}$$

Def. 4 Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\Phi \in C^1(K, \mathbb{R}^3)$ und $\mathcal{F}_k := \Phi(K)$. Dann heißt

$$I(\mathcal{F}_k) := \int\limits_K ||\Phi_x(x, y) \times \Phi_y(x, y)|| d(x, y)$$

der *Flächeninhalt* des Flächenstücks $\mathcal{F}_K$.

Bem. Ist Φ_K die Parameterdarstellung eines glatten Flächenstücks, dann sei für $f \in C(\mathcal{F}_K, \mathbb{R})$ definiert:

$$\int\limits_{\Phi_K} f do := \int\limits_K f(\Phi(x, y)) \cdot ||\Phi_x(x, y) \times \Phi_y(x, y)|| d(x, y).$$

Diese Definition ist unabhängig von der Parameterdarstellung und man schreibt daher statt dessen auch

$$\int\limits_{\mathcal{F}_K} f do := \int\limits_{\Phi_K} f do$$

Def. 5 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ zulässig, $U \supseteq B$ offen und $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung einer glatten Fläche $\mathcal{F}$. Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung des Randes von B (gemäß Satz 1), dann heißt der durch $\Phi \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ entstehende Weg *Berandung* von $\mathcal{F}$.

Satz 2 (Integralsatz von Stokes) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ zulässig, $U \supseteq B$ offen und $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ sei eine Parametrisierung des Randes von B. Weiter sei $V \supseteq B$ offen und $f \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$. Dann gilt

$$\int\limits_{\Phi|_B} \operatorname{rot} f \cdot n do = \int\limits_{\Phi \circ \gamma} f(x, y, z) d(x, y, z).$$

Def. 6 Seien B, U, γ wie oben, $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $\varphi_1 < \varphi_2$ auf B. Dann heißt

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in B, z \in [\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]\}$$

ein *Normalbereich* bezüglich der z-Achse.

Satz 3 (Integralsatz von GAUSS im Raum) Ist $V \subseteq \mathbb{R}^3$ Normalbereich bezüglich aller drei Achsen und f auf einer offenen Obermenge von V nach $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_V \operatorname{div} f(x,y,z) d(x,y,z) = \int_{\partial V} f \cdot n do$$

Bem. Durch Approximation mit Normalbereichen kann Satz 3 auch auf Kugeln, Ellipsoide und viele andere Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ erweitert werden.

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Def. 7 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{1+(k+1)p}$ und $F : D \to \mathbb{R}^p$. Eine Gleichung der Form

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)) = 0$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung* k-ter Ordnung (DGL). $y : I \to \mathbb{R}^p$ heißt *Lösung* dieser Differentialgleichung auf I, falls gilt:

1. y ist auf I k-mal differenzierbar.
2. Für $x \in I$ ist $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)) \in D$.
3. Für $x \in I$ ist $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)) = 0$.

Bsp.

- Betrachte

  $$F : \mathbb{R}^2 \to R, \qquad F(\xi, \eta) := \xi^2 + \eta^2 - 1$$

  und die Differentialgleichung $F(y(x), y'(x)) = 0$, also

  $$(y'(x))^2 + (y(x))^2 = 1.$$

  z.B. ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) := \sin x$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Eine weitere (!) Lösung ist $y : [-5, 7) \to \mathbb{R}$, $y(x) := \sin x$. Schließlich löst auch $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = 1$ die Differentialgleichung.

- Betrachte

  $$F : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad F(x, \xi, \eta) = \eta + \frac{\xi}{x}$$

  und die Differentialgleichung $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, also

  $$y'(x) = -\frac{1}{x} y(x).$$

  Sei $c \in \mathbb{R}$ fest. Dann ist z.B. $y : (0, \infty) \to \mathbb{R}, y(x) = \frac{c}{x}$ Lösung. Weitere Lösungen sind z.B.: $y : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, y(x) = \frac{c}{x}$.

- Betrachte $f \in C([a,b],\mathbb{R})$,

$$F : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,\eta) = \eta - f(x)$$

und die Differentialgleichung $F(x, y'(x)) = 0$, also

$$y'(x) = f(x).$$

Dann ist $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ genau dann Lösung dieser Differentialgleichung, wenn y Stammfunktion von f ist.

- Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix}.$$

(Beachte: Im Sinne obiger Definition ist hier $p = 2$.) Eine Differentialgleichung dieser Form heißt auch *Differentialgleichungssystem*. Eine Lösung ist hier z.B.

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad y(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(\xi,\eta,p,q) = \begin{pmatrix} p + \eta \\ q - \xi \end{pmatrix}$$

und die Differentialgleichung lautet $F(y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)) = 0$.

Def. 8 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{kp+1}$ und $f : D \to \mathbb{R}^p$. Eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(k)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k-1)}(x))$$

heißt *explizite* Differentialgleichung k-ter Ordnung.

Bem. Wir werden vorwiegend explizite Differentialgleichungen mit stetiger rechten Seite $f : D \to \mathbb{R}^p$ betrachten. Ist $y : I \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung obiger Differentialgleichung, so ist $y \in C^k(I, \mathbb{R}^p)$. Ist weiter $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}) \in D$, so heißt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y^{(k)}(x) &= f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \\ &\vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) &= y_{k-1} \end{aligned}$$

Anfangswertproblem (AWP). $y : I \to \mathbb{R}^p$ heißt *Lösung* des Anfangswertproblems, falls y Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(k)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k-1)}(x))$$

ist und zusätzlich gilt $y^{(j)}(x_0) = y_j$ $(j = 0, \ldots, k-1)$.

Bsp.

- Betrachte das Anfangswertproblem $y'(x) = 2y(x)$, $y(0) = 4$. Eine Lösung dieses Anfangswertproblems ist z.B.:

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y(x) = 4 \cdot \mathrm{e}^{2x}.$$

- Betrachte das Anfangswertproblem $y'(x) = 2 \cdot \sqrt{|y(x)|}$, $y(0) = 0$. Lösungen dieses Anfangswertproblems sind z.B.:

$$\begin{aligned} y : [0, \infty) \to \mathbb{R}, &\qquad y(x) = 0 \\ y : [0, \infty) \to \mathbb{R}, &\qquad y(x) = x^2. \end{aligned}$$

  Für jedes $a > 0$ ist außerdem

$$y : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad y(x) = (\max\{0, x - a\})^2$$

  eine Lösung.

- Wir betrachten ein zylinderförmiges Gefäß mit einer Grundfläche A, in dem eine Flüssigkeit steht. Am Boden des Gefäßes befinde sich ein Loch der Fläche a, durch das die Flüssigkeit entweichen kann. Die Höhe der Flüssigkeit im Gefäß wird dann modelliert durch das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \underbrace{\frac{a}{A}\sqrt{2g}}_{=:-k} \cdot \sqrt{y(x)}, \qquad y(0) = y_0,$$

  also $y'(x) = f(y(x))$, $y(0) = y_0$ mit $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -k\sqrt{x}$. Dieses Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar, da f monoton fallend ist. Die Lösung lautet

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{k}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{k}\sqrt{y_0} - x\right)^2, & x \in [0, \frac{2}{k}\sqrt{y_0}] \\ 0 & x > \frac{2}{k}\sqrt{y_0} \end{cases}$$

Def. 9 Ein Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y^{(k)}(x) &= f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \\ &\vdots \\ y^{(k-1)}(x_0) &= y_{k-1} \end{aligned}$$

heißt *eindeutig lösbar*, falls folgendes gilt:

1. Das Anfangswertproblem hat eine Lösung
2. Sind $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^p$, $y_2 : I \to \mathbb{R}^p$ Lösungen des Anfangswertproblems, so gilt $y_1(x) = y_2(x)$ für $x \in I_1 \cap I_2$.

Bem. Die Variablenbezeichnung in Differentialgleichungen ist nicht einheitlich. Statt $y(x)$ schreibt man auch $y(t), x(t), u(x), v(x), u(t), v(t), \ldots$

3 Lineare Differentialgleichungen und Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

In diesem Abschnitt seien $p = 1$, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, g \in C(J, \mathbb{R})$.

Def. 10 Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) + g(x)$$

heißt *linear*. Ist $g = 0$ auf J, so heißt sie *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

Bem. Sei $A : J \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von a. Dann ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $y : J \to \mathbb{R}$, $y(x) := c \cdot \mathrm{e}^{A(x)}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x).$$

Satz 4 Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in J$, $a, c \in C(J, \mathbb{R})$. Dann gilt: Die Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = a(x) \cdot y(x) + g(x)$ auf J sind genau die Funktionen $y : J \to \mathbb{R}$ der Form

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\int_\xi^x a(\eta)d\eta} \cdot g(\xi)d\xi + c \cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^x a(\xi)d\xi}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Jede Lösung auf einem Intervall $I \subseteq J$ ist Einschränkung einer dieser Funktionen auf I. Für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) + g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

eindeutig lösbar und $y : J \to \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\int_\xi^x a(\eta)d\eta} \cdot g(\xi)d\xi + y_0 \mathrm{e}^{\int_{x_0}^x a(\xi)d\xi}$$

ist Lösung des Anfangswertproblems auf J.

Bsp. Betrachte das Anfangswertproblem $y'(x) = xy(x) + x$, $y(0) = 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} y(x) \quad &:= \int_0^x \mathrm{e}^{\int_\xi^x \eta d\eta} \xi d\xi + 2 \cdot \mathrm{e}^{\int_0^x \xi d\xi} = \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2-\xi^2)} \xi d\xi + 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \\ &= 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - 1 \end{aligned}$$

Oft ist es einfacher, eine Lösung in Analogie zum Beweis des Satzes herzuleiten: Betrachte dazu zunächst das homogene Problem. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} & && y'(x) = x \cdot y(x) \\ &\iff && \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}(y'(x) - x \cdot y(x)) = 0 \\ &\implies && \frac{d}{dx}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} y(x)) = 0 \\ &\implies && \exists \quad c \in \mathbb{R} : \qquad y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}. \end{aligned}$$

Um nun zur Lösung des inhomogenen Problems zu kommen, faßt man die Konstante c als Funktion in x auf. Dieses Verfahren wird als *Variation der Konstanten* bezeichnet. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& & y'(x) &= c'(x)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + \underbrace{c(x)x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}}_{=x\cdot y(x)} \\
&\Longrightarrow & c'(x) &= x\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\
&\Longrightarrow & c(x) &= \int_0^x \xi\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-0^2)} + c
\end{aligned}
$$

Aus der Forderung $y(0)=2$ folgt $c=3$ und damit

$$y(x) = (-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}+3)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = 3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - 1.$$

Def. 11 Seien $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $g \in C(J_1,\mathbb{R}), f \in C(J_2,\mathbb{R})$. Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = g(x)f(y(x))$$

heißt *mit getrennten Veränderlichen.* Im Spezialfall $g=1$, also $y'(x) = f(y(x))$ heißt die Differentialgleichung *autonom.*

Bem. Sei $(x_0,y_0) \in J_1^0 \times J_2^0$ mit $f(y_0) \neq 0$. Dann gilt

$$\int_{x_0}^{x} g(\xi)d\xi = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{f(\eta)}d\eta$$

Da die Funktion $z \mapsto \int_{y_0}^{z} \frac{1}{f(\eta)}d\eta$ streng monoton wächst, besitzt sie eine Umkehrfunktion und damit kann die obige Gleichung nach $y(x)$ aufgelöst werden.

Bsp. Betrachte das Anfangswertproblem $y'(x) = x(y(x))^2$, $y(0)=1$. Wegen

$$
\begin{aligned}
& & \frac{y'(x)}{(y(x))^2} = x \quad &\Longrightarrow \quad \int_1^{y(x)} \frac{1}{\xi^2}d\xi = \int_0^x \xi\,d\xi \\
&\Longrightarrow & 1 - \frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}x^2 \quad &\Longrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}
$$

ist

$$y : (-\sqrt{2},\sqrt{2}) \to \mathbb{R}, \qquad y(x) := \frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2}$$

eine Lösung dieses Anfangswertproblems.

Satz 5 Seien $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $g \in C(J_1,\mathbb{R}), f \in C(J_2,\mathbb{R})$, (x_0,y_0) sei ein innerer Punkt von $J_1^0 \times J_2^0$ und $f(y_0) \neq 0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für $I := (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ gilt:

1. Das Anfangswertproblem $y'(x) = g(x)f(y(x))$, $y(x_0) = y_0$ besitzt eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ mit $f(y(x)) \neq 0$ $(x \in I)$.

2. Sind $y_1 : I_1 \to \mathbb{R}$, $y_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ Lösungen des Anfangswertproblems mit $f(y_1(x)) \neq 0$ $(x \in I_1)$, so gilt $y_1 = y_2$ auf $I_1 \cap I_2$. Insbesondere ist das Anfangswertproblem damit eindeutig lösbar.

Bem.

- Sei $f : J \to \mathbb{R}$ stetig. Betrachte die Differentialgleichung $y'(x) = f(y(x))$. Ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung, so ist
$$y_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y_a(x) = y(x+a)$$
ebenfalls eine Lösung.

- Im Fall, daß $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, kann es vorkommen, daß die Differentialgleichung $y'(x) = f(y(x))$ keine Lösung auf $\mathbb{R}$ besitzt. Dies ist z.B. für $y'(x) = 1 + (y(x))^2$ der Fall.

Satz 6 Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C(J, \mathbb{R})$ und $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = f(y(x))$. Dann ist y monoton auf I.

4 Einige Substitutionen

Dieser Paragraph enthält „Rechenhilfen", um einige Differentialgleichungen von spezieller Gestalt auf einfachere Differentialgleichungen zu transformieren. (vgl. KAME: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Band 1)

1. *Homogene Differentialgleichung:*
$$y'(x) = f(\tfrac{y(x)}{x})$$
Man substituiert $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ und erhält $y'(x) = u(x) + xu'(x) = f(u(x))$, also
$$u'(x) = \frac{f(u(x)) - u(x)}{x}.$$
Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen.

2. $y'(x) = f(ax + by(x))$: Hier setzt man $u(x) = ax + by(x)$ und erhält die autonome Differentialgleichung $u'(x) = a + bf(u(x))$.

3. BERNOULLI-*sche Differentialgleichung*:
$$y'(x) = g(x)y(x) + h(x)(y(x))^\alpha, \qquad \alpha \neq 1.$$
Setzt man $u(x) = (y(x))^{1-\alpha}$, so erhält man
$$\begin{aligned} u'(x) &= (1-\alpha)(y(x))^{-\alpha}y'(x) = (1-\alpha)(g(x)y(x) \cdot (y(x))^{1-\alpha} + h(x)) \\ &= (1-\alpha)g(x)u(x) + (1-\alpha)h(x). \end{aligned}$$
Dies ist eine lineare Differentialgleichung für u.

4. RICCATI-*sche Differentialgleichung*:

$$y'(x) = g(x)y(x) + h(x)y^2(x) + k(x).$$

Sind $y, \tilde{y}$ Lösungen dieser Differentialgleichung, so genügt $u = y - \tilde{y}$ einer BERNOULLI-schen Differentialgleichung (mit $\alpha = 2$), nämlich

$$u'(x) = (g(x) + 2 \cdot \tilde{y}(x)h(x)) \cdot u(x) + h(x) \cdot u^2(x),$$

welche mittels $v(x) = \frac{1}{u(x)}$ in eine lineare Differentialgleichung überführt werden kann. Kennt man eine Lösung $\tilde{y}$ der RICCATI-schen Differentialgleichung, so können weitere Lösungen durch Lösen einer linearen Differentialgleichung berechnet werden.

Bem. Im allgemeinen können Differentialgleichung (selbst einfacher Bauart) nicht dadurch gelöst werden, daß man eine Lösung „ausrechnet“. Aus diesem Grund ist man interessiert:

- ... an Sätzen, die die Existenz von Lösungen bzw. deren Eindeutigkeit sichern,
- ... an Aussagen über das Verhalten von Lösungen, die ohne Kenntnis der Lösung möglich sind,
- ... an numerischen Verfahren, die in der Regel an Zerlegungspunkten von Intervallen Näherungen für den Funktionswert einer Lösung liefern.

5 Ein Eindeutigkeitssatz

Satz 7 Sei $J \leq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in J$, $a, g \in C(J, \mathbb{R})$, $v : J \to \mathbb{R}$ stetig auf J und differenzierbar auf J^0 mit

$$v'(x) \leq a(x)v(x) + g(x) \qquad (x \in J^0).$$

Dann gilt für $x \in J$:

$$v(x) \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \right\} v(x_0) e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{\xi}^{x} a(\eta)d\eta} g(\xi) d\xi \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } x \geq x_0 \\ \text{für } x \leq x_0 \end{array} \right.$$

Def. 12 Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ und $f : D \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion. f heißt *lokal* LIPSCHITZ-*stetig* auf D bezüglich y, wenn zu jedem $(x_0, y_0) \in D$ Zahlen $\delta > 0$ und $L > 0$ existieren mit $(x, y) \in D, (x, \tilde{y}) \in D, ||x - x_0|| < \delta$ und

$$||y - y_0|| < \delta, ||\tilde{y} - y_0|| < \delta \quad \Longrightarrow \quad ||f(x, y) - f(x, \tilde{y})|| \leq L||y - \tilde{y}||$$

Bem. Diese Definition ist unabhängig von der verwendeten Norm.

Bsp. Sei $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \sqrt{|x|}y^2.$$

f ist lokal LIPSCHITZ-stetig bezüglich y auf D: Sei $(x_0, y_0) \in D$ und $\delta = 1$. Aus $|x - x_0| < \delta = 1$, $|y - y_0| < 1$ und $|\tilde{y} - y_0| < 1$ folgt

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| = \sqrt{|x|} \cdot |y + \tilde{y}| \cdot |y - \tilde{y}| \leq \underbrace{2\sqrt{1 + |x_0|}\sqrt{1 + |y_0|}}_{=:L} \cdot |y - \tilde{y}|.$$

Satz 8 Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$, $(x_0, y_0) \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion, die lokal LIPSCHITZ-stetig bezüglich y ist. Sind $y : I \to \mathbb{R}^p$ und $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^p$ Lösungen des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0,$$

dann gilt $y(x) = \tilde{y}(x)$ $(x \in I \cap \tilde{I})$.

Bem.

- Dieser Satz sagt nicht, daß das Anfangswertproblem eine Lösung besitzt. Weiß man aber, daß das Anfangswertproblem lösbar ist, so ist diese Lösung unter den angegebenen Voraussetzungen eindeutig.
- Das Beispiel $f(x,y) = 2\sqrt{|y|}$ $(p = 1, D = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ zeigt, daß Mehrdeutigkeit vorliegen kann, wenn f nicht lokal LIPSCHITZ-stetig ist.
- Für Eindeutigkeit *nach rechts* (d.h. je zwei Lösungen stimmen für $x \geq x_0$ überein, solange sie existieren) genügt eine lokale Bedingung der Form

  $$(y - \tilde{y}) \cdot (f(x,y) - f(x,\tilde{y})) \leq L||y - \tilde{y}||.$$

- Sei $||\cdot||$ die EUKLID-Norm auf $\mathbb{R}^p$, also

  $$||z|| := \sqrt{z_1^2 + \cdots + z_p^2} \qquad (z \in \mathbb{R}^p).$$

  Es gilt $||\cdot|| \in C^\infty(\mathbb{R}^p \setminus \{0\}, \mathbb{R})$. Sei $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p) : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I. Dann gilt

  $$\frac{d}{dx}||u(x)|| = \frac{u(x) \cdot u'(x)}{||u(x)||}.$$

- Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und stetig partiell differenzierbar nach y. Dann ist f lokal LIPSCHITZ-stetig bezüglich y.

6 Der Satz von PICARD und LINDELÖF

Satz 9 (Satz von PICARD-LINDELÖF) Es sei $D = [a,b] \times \mathbb{R}^p$ (Eine Menge dieser Form heißt *Streifen*) und $f : D \to \mathbb{R}^p$ stetig. Weiter existiere ein $L > 0$ mit

$$||f(x,y) - f(x,\tilde{y})|| \leq L \cdot ||y - \tilde{y}|| \qquad ((x,y),(x,\tilde{y}) \in D)$$

(d.h. f ist LIPSCHITZ-stetig bzgl. y auf D). Weiter sei $(x_0, y_0) \in D$. Dann ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

eindeutig lösbar auf $[a,b]$ (d.h. es ist eindeutig lösbar und besitzt eine Lösung $y:[a,b]\to\mathbb{R}^p$). Jede Folge „*sukzessiver Approximationen*", definiert durch $z_0\in C([a,b],\mathbb{R}^p)$ beliebig und

$$z_{n+1}:[a,b]\to\mathbb{R}^p,\qquad z'_{n+1}(x):=f(x,z_n(x)),\quad z_{n+1}(x_0)=y_0\ (n\in\mathbb{N}_0)$$

konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen diese Lösung.

Bsp.

- Betrachte

$$f:[0,2]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x,y)=x^2y+\sin^2 y.$$

f ist stetig auf $[0,2]\times\mathbb{R}$ und es gilt

$$\left|\frac{d}{dy}\sin^2 y\right|=|2\cos y\sin y|\le 2\qquad(y\in\mathbb{R}).$$

Damit ist wegen

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x,\tilde y)| &\le |x^2(y-\tilde y)|+|\sin^2 y-sin^2\tilde y|\\ &\le 4\cdot|y-\tilde y|+2\cdot|y-\tilde y|=6|y-\tilde y|\end{aligned}$$

das Anfangswertproblem $y'(x)=x^2y(x)+\sin^2 y(x), y(x_0)=y_0$ auf $[0,2]$ eindeutig lösbar.

- Seien $A\in C([a,b],\mathbb{R}^{p\times p})$, $g\in C([a,b],\mathbb{R}^p)$ und

$$f:[a,b]\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p,\qquad f(x,y)=A(x)y+g(x).$$

(Beachte: Für festes $x\in[a,b]$ ist $y\mapsto A(x)y$ eine lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix $A(x)$). Das zugehörige Anfangswertproblem

$$y'(x)=A(x)y(x)+g(x),\qquad y(x_0)=y_0$$

heißt *linear* und die Differentialgleichung heißt *homogen* bzw. *inhomogen*, falls $g=0$ bzw. $g\ne 0$.
Es sei $|||\cdot|||$ eine Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{p\times p}$ mit

$$|||By|||\le|||B|||\cdot||y||\qquad(B\in\mathbb{R}^{p\times p}, y\in\mathbb{R}^p).$$

Es gilt: f ist stetig auf $[a,b]\times\mathbb{R}^p$. Da A stetig auf $[a,b]$ ist, ist auch $x\mapsto|||A(x)|||$ stetig auf $[a,b]$, somit beschränkt, d.h.

$$\exists\quad L>0\quad\forall\quad x\in[a,b]:\qquad|||A(x)|||\le L.$$

Daher gilt für $(x,y),(x,\tilde y)\in[a,b]\times\mathbb{R}^p$

$$||f(x,y)-f(x,\tilde y)||=||A(x)(y-\tilde y)||\le|||A(x)|||\cdot||y-\tilde y||\le L||y-\tilde y||.$$

Damit ist das Anfangswertproblem auf $[a,b]$ eindeutig lösbar.

7 Der Existenzsatz von Peano

Satz 10 (Satz von Peano) Sei $f : [a,b] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ stetig und beschränkt, also

$$\exists \quad M > 0 \quad \forall \quad (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}^p : \qquad ||f(x,y)|| \le M,$$

und $(x_0, y_0) \in [a,b] \times \mathbb{R}^p$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad y(x_0) = y_0$$

eine Lösung auf $[a,b]$.

Def. 13 Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq C([a,b], \mathbb{R}^p)$ heißt *gleichgradig stetig* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\forall\, x, y \in [a,b] \;\forall\, \varphi \in \mathcal{F} :$$
$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad ||\varphi(x) - \varphi(y)|| < \varepsilon.$$

Bem.

- Gleichgradige Stetigkeit ist eine Eigenschaft von Mengen, nicht von Funktionen.
- Ist $\mathcal{F} \subseteq C([a,b], \mathbb{R}^p)$ und existiert ein $c > 0$ so, daß jede Funktion φ aus $\mathcal{F}$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante c, so ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.

Satz 11 (Satz von Ascoli-Arcelà) Sei $\mathcal{F} \subseteq C([a,b], \mathbb{R}^p)$ gleichgradig stetig und es gelte

$$\exists \quad k > 0 \quad \forall \quad \varphi \in \mathcal{F} \quad \forall \quad x \in [a,b] : \qquad ||\varphi(x)|| \le k.$$

Dann besitzt jede Folge (φ_k) in $\mathcal{F}$ eine auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Bem. Satz 11 ist ein Kompaktheitskriterium im Raum $C([a,b], \mathbb{R}^p)$ mit der Norm $||\varphi||_\infty := \max\limits_{x \in [a,b]} ||\varphi(x)||$. Genauer gilt: $\mathcal{F}$ ist genau dann kompakt, wenn $\mathcal{F}$ beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig ist.

Bsp. Betrachte

$$f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \sqrt{x} + \sin \sqrt{|y|}$$

und das zugehörige Anfangswertproblem $y'(x) = \sqrt{x} + \sin \sqrt{|y(x)|}$, $y(0) = 1$. Wegen $|f(x,y)| \le 2$ für $(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ und weil f stetig ist, gilt: Das Anfangswertproblem ist lösbar auf $[0,1]$. Ist $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Lösung, so gilt $|y(x) - 1| \le 2x$ $(x \in [0,1])$.

Bem. Sei $D = [a,b] \times [y_0 - c, y_0 + c] \subseteq \mathbb{R}$ für ein $c > 0$ und $f \in C(D, \mathbb{R})$. Da D kompakt und f stetig ist, ist f auf D beschränkt. Es existiert also ein $M > 0$ mit $|f(x,y)| \le M$ $((x,y) \in D)$. Wir setzen nun $f : D \to \mathbb{R}$ zu einer Funktion $\tilde{f} : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unter Erhaltung der Schranke M fort: Sei also

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x, y_0 + c) & (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : \; y > y_0 + c \\ f(x,y) & (x,y) \in D \\ f(x, y_0 - c) & (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : \; y < y_0 - c \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f}$ stetig auf $[a,b] \times \mathbb{R}$, $\tilde{f}|_D = f$ und es gilt $|\tilde{f}(x,y)| \leq M$ für alle $(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}$. Nach dem Satz von Peano besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \tilde{f}(x, y(x)), \qquad y(a) = y_0$$

eine Lösung $y : [a,b] \to \mathbb{R}$. Für jede solche Lösung gilt $|y(x) - y_0| \leq M(x-a)$ $(x \in [a,b])$, also

$$y_0 - M(x-a) \leq y(x) \leq y_0 + M(x-a) \qquad (x \in [a,b]).$$

Ist nun $M(x-a) \leq c \iff x \leq a + \frac{c}{M}$, so folgt $y(x) \in [y_0 - c, y_0 + c]$. Damit gilt: Das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(a) = y_0$ ist lösbar auf $[a, \min\{b, a + \frac{c}{M}\}]$.

8 Nicht fortsetzbare Lösungen

Def. 14 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{p+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion und $(x_0, y_0) \in D$. Eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}^p$ des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

heißt *nicht fortsetzbar*, wenn es keine Lösung $\tilde{y} : J \to \mathbb{R}^p$ gibt mit $J \supsetneq I$ und $\tilde{y}|_I = y$. Sie heißt *nach rechts nicht fortsetzbar*, wenn es keine Lösung $\tilde{y} : J \to \mathbb{R}^p$ gibt mit $J \cap [x_0, \infty) \supsetneq I \cap [x_0, \infty)$ und $\tilde{y}|_{I \cap [x_0, \infty)} = y$. (Analog: nach links nicht fortsetzbar)

Bem. y ist genau dann nicht fortsetzbar, wenn y nicht nach links und nicht nach rechts fortsetzbar ist.

Satz 12 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{p+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion, $(x_0, y_0) \in D$ und $u : I \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Dann gibt es eine nicht fortsetzbare Lösung $v : J \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems mit $J \supseteq I$ und $v|_I = u$.

Bem. Satz 12 liefert also erst die Existenz einer nicht fortsetzbaren Lösung, wenn man weiß, daß eine Lösung existiert. Dies folgt z.B. aus folgendem, „lokalen“ Existenzsatz von Peano.

Satz 13 (Lokaler Existenzsatz von Peano) Es sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ offen, $f \in C(D, \mathbb{R}^p)$ und $(x_0, y_0) \in D$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I^0$.

Bem.

- Zu jeder Lösung $y : I \to \mathbb{R}^p$ des Anfangswertproblems gibt es unter den Voraussetzungen des Satzes eine nicht fortsetzbare Lösung $\tilde{y} : J \to \mathbb{R}^p$ mit $J \supseteq I$ und $\tilde{y}|_I = y$. Da D offen ist, ist J offen, also $J = (\omega_-, \omega_+)$ mit $\omega_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \omega_+ \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Denn wäre J z.B. von der Form $(a, b]$, so ist $(x_1, y_1) =: (b, y(b)) \in D$, dann ist nach obigem Satz das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_1) = y_1$$

nach rechts lösbar und die auf $(a, b]$ definierte Lösung $\tilde{y}$ besitzt eine Fortsetzung nach rechts (analog nach links).

- Ist das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ in obigem Satz eindeutig lösbar, so gibt es genau eine nicht fortsetzbare Lösung $(\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$. Diese Lösung bezeichnet man dann als *die* Lösung des Anfangswertproblems.

- Unter des Voraussetzungen des obigen Satzes ist z.B. genau dann eine Lösung $y : [x_0, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$ nach rechts nicht fortsetzbar, wenn es keine kompakte Menge $K \subseteq D$ gibt mit

$$\{(x, y(x)) : \ x \in (x_0, \omega_+)\} \subseteq K$$

9 Beispiele

1. Die *logistische Gleichung* liefert ein einfaches Modell für das Wachstum von Populationen. Seien $a, b > 0$. Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'(x) = ay(x) - by^2(x), \qquad y(0) = y_0 \geq 0$$

und die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ay - by^2$. f ist stetig auf $\mathbb{R}^2$ und lokal Lipschitz-stetig bezüglich y. Das Anfangswertproblem hat damit eine eindeutig bestimmte, nicht fortsetzbare Lösung $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$. Die Lösungen können ausgerechnet werden:

- Konstante Lösungen: Es gilt

$$ay - by^2 = 0 \iff y \cdot (a - by) = 0 \iff y = 0 \ \vee \ y = \frac{a}{b}.$$

Also sind $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = 0$ bzw. $y(x) = \frac{a}{b}$ konstante Lösungen der Differentialgleichung.

- Sei $y_0 \geq 0$, $y_0 \neq \{0, \frac{a}{b}\}$. Die Methode zur Lösung von Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen liefert:

$$y(x) = \frac{ay_0}{by_0 + (a - by_0) \cdot \mathrm{e}^{-ax}}.$$

1. Fall $0 < y_0 < \frac{a}{b}$. Dann ist $a - by_0 > 0$ und somit

$$(\omega_-, \omega_+) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

2. Fall $y_0 > \frac{a}{b}$. Dann ist für $x \geq 0$ stets

$$by_0 + \underbrace{(a - by_0)}_{\leq 0} \mathrm{e}^{-ax} \geq by_0 + (a - by_0) \cdot 1 = a > 0$$

und somit $\omega_+ = \infty$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} & by_0 + (a - by_0)\mathrm{e}^{-ax} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{-ax} = \frac{by_0}{by_0 - a} \\ \Longleftrightarrow \qquad & x = \frac{1}{a} \cdot \log\left(1 - \frac{a}{by_0}\right). \end{aligned}$$

In diesem Fall ist wegen $\lim\limits_{x \to \omega_- +} y(x) = \infty$ also $\omega_- = \frac{1}{a} \log\left(1 - \frac{a}{by_0}\right)$.
Insgesamt ist dann also

$$(\omega_-, \omega_+) = (\frac{1}{a} \log\left(1 - \frac{a}{by_0}\right), \infty).$$

2. Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$ und

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \sin \frac{1}{1 - (x^2 + y^2)}.$$

Betrachte das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(0) = 0$. f ist stetig auf D und LIPSCHITZ-stetig bezüglich y, denn

$$f_y(x, y) = \frac{2y}{(1 - (x^2 + y^2))^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{1 - (x^2 + y^2)}\right)$$

ist stetig auf D. Das Anfangswertproblem ist also eindeutig lösbar. Sei $y : (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems.

- **Beh.** $\omega_+ = -\omega_-$.
  Bew. Sei $z(x) = -y(-x)$ $(x \in (-\omega_+, -\omega_-))$. Es gilt $z(0) = -y(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} z'(x) &= y'(-x) = \sin \frac{1}{1 - ((-x)^2 + (-y(-x))^2)} \\ &= \sin \frac{1}{1 - (x^2 + z(x)^2)}. \end{aligned}$$

  Damit gilt $y(x) = z(x)$ $(x \in (\omega_-, \omega_+) \cap (-\omega_+, -\omega_-))$. Annahme: $\omega_+ < -\omega_-$. Dann wäre $z(x) = -y(-x)$ $(x \in [0, -\omega_-))$ eine Fortsetzung von y nach rechts. Wäre $\omega_+ > -\omega_-$, dann wäre $-\omega_+ < \omega_-$. Dann aber wäre $z(x) = -y(-x)$ $(x \in (-\omega_+, 0])$ eine Fortsetzung von y nach links. Insgesamt ist also $\omega_+ = -\omega_-$. ∎

- **Beh.** $\omega_+ \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$
  Bew. Aus $|y'(x)| \leq 1$ $(x \in (\omega_-, \omega_+))$ folgt $|y(x)| \leq |x|$ $(x \in (\omega_-, \omega_+))$ und $|y(x) - y(\tilde{x})| \leq |x - \tilde{x}|$ $(x, \tilde{x} \in (\omega_-, \omega_+))$. Damit ist y gleichmäßig stetig auf (ω_-, ω_+), somit existiert der Grenzwert $\alpha := \lim\limits_{x \to \omega_+ -} y(x)$.

Es gilt $\omega_+^2 + \alpha^2 = 1$, denn wegen $x^2 + (y(x))^2 < 1$ ist $\omega_+^2 + \alpha^2 \le 1$. Wäre $\omega_+^2 + \alpha^2 < 1$, so könnte man y durch eine Lösung von

$$z'(x) = f(x, z(x)), \qquad z(\omega_+) = \alpha$$

nach rechts fortsetzen. Aus $x^2 + (y(x))^2 \le 2x^2$ $(x \in (\omega_-, \omega_+))$ folgt für $x \to \omega_+-$ die Beziehung $\omega_+^2 + \alpha^2 \le 2\omega_+^2$ und damit $1 \le 2\omega_+^2$ und schließlich $\omega_+ \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$. ■

3. Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + y_2(x) + \mathrm{e}^{-x} y_1^2(x), \qquad & y_1(0) &= 0 \\ y_2'(x) &= y_2(x) & y_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

   Dieses Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar, die Lösung ist

$$y : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \qquad y(x) := (y_1(x), y_2(x)) = (\mathrm{e}^x \tan x, \mathrm{e}^x).$$

4. Sei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt und $y : I \to \mathbb{R}$ eine nicht fortsetzbare Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0.$$

   Dann ist $I = [a, b]$. Insbesondere hat also jede Lösung dieses Anfangswertproblems eine Fortsetzung auf $[a, b]$.

10 Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Def. 15 Sei $A : [a, b] \to \mathbb{R}^{p \times p}$ eine stetige Matrixfunktion, $g \in C([a, b], \mathbb{R}^p)$. Die Differentialgleichung

$$y'(x) = A(x)y(x) + g(x)$$

heißt *lineare Differentialgleichung* im $\mathbb{R}^p$ (oder *lineares System von p Differentialgleichungen*). Ist $g = 0$, so heißt die Differentialgleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

Bem. Betrachte den Vektorraum $C([a, b], \mathbb{R}^p)$. $y_1, y_2, \ldots, y_k \in C([a, b], \mathbb{R}^p)$ heißen *linear unabhängig*, falls gilt

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_k y_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

für $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, k)$. Dies bedeutet genauer

$$\alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_k y_k(x) = 0 \ (x \in [a, b]) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

z.B. sind $y_1, \ldots, y_k$ linear unabhängig, falls ein $x_0 \in [a, b]$ existiert, so daß die Vektoren $y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_k(x_0)$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^p$ sind. Andererseits können $y_1, \ldots, y_k$ linear unabhängig sein, aber $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ für alle $x \in [a, b]$ linear abhängig.

Betrachtet man z.B. $p = 1$ und $y_1(x) = 1, y_2(x) = x$ $(x \in [0, 1])$, dann sind $y_1(x), y_2(x)$ für jedes $x \in [a, b]$ linear abhängig in $\mathbb{R}$, aber aus $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$, d.h. $\alpha_1 + x\alpha_2 = 0$ $(x \in [a, b])$, folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Satz 14 Sei $A : [a,b] \to \mathbb{R}^{p\times p}$ stetig. Dann ist

$$V := \{y \in C^1([a,b],\mathbb{R}^p) : \quad \forall\, x \in [a,b] : \; y'(x) = A(x)y(x)\}$$

ein p-dimensionaler Untervektorraum von $C([a,b],\mathbb{R}^p)$.

Def. 16 Jede Basis des Lösungsraums V aus obigem Satz heißt *Fundamentalsystem* der Differentialgleichung $y'(x) = A(x)y(x)$. Ist $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ ein Fundamentalsystem von $y'(x) = A(x)y(x)$, so faßt man diese Funktionen zu einer Matrixfunktion

$$Y : [a,b] \to \mathbb{R}^{p\times p}, \qquad Y(x) := (y_1(x) \mid y_2(x) \mid \cdots \mid y_p(x))$$

zusammen. Die Funktion Y wird ebenfalls als *Fundamentalsystem* (oder *Fundamentalmatrix*) bezeichnet.

Bem. Die Lösungen von inhomogenen Differentialgleichungssystemen

$$y'(x) = A(x) \cdot y(x) + g(x)$$

haben die Form $y(x) = y_h(x) + y_s(x)$. Dabei ist $y_h : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung des homogenen Problems und $y_s : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ eine beliebige spezielle Lösung.

Sei nun $Y : [a,b] \to \mathbb{R}^{p\times p}$ das Fundamentalsystem eines homogenen Differentialgleichungssystems $y'(x) = A(x)y(x)$ mit $Y(x_0) = I$ und $y_s : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ die Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems $y'(x) = A(x)y(x) + g(x)$ mit $y_s(x_0) = 0$. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = A(x)y(x) + g(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

genau die Funktion

$$y : [a,b] \to \mathbb{R}^p, \qquad y(x) := Y(x) \cdot y_0 + y_s(x)$$

Satz 15 Seien $y_1, y_2, \dots, y_k \in V$. Dann gilt: $y_1, y_2, \dots, y_k$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für alle $x \in [a,b]$ die Vektoren $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x) \in \mathbb{R}^p$ linear unabhängig sind. Insbesondere gilt: Ist $Y : [a,b] \to \mathbb{R}^{p\times p}$ das Fundamentalsystem eines homogenen Differentialgleichungssystems, so ist $\det Y(x) \neq 0$ $(x \in [a,b])$.

Bem. Das Fundamentalsystem Y eines homogenen Differentialgleichungssystems kann man auch als Lösung der Matrixdifferentialgleichung

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

auffassen.

Def. 17 Sind $y_1, \dots, y_p : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ Lösungen eines homogenen Differentialgleichungssystems, dann heißt

$$\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) := \det(y_1(x) \mid y_2(x) \mid \cdots \mid y_p(x))$$

die WRONSKI-*Determinante.*

Bem. Sind $y_1, \dots, y_p : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ Lösungen eines homogenen Differentialgleichungssystems und ist $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ ihre WRONSKI-Determinante, so gilt

$$\Phi'(x) = (\operatorname{Spur} A(x)) \cdot \Phi(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

Wählt man $x_0 \in [a,b]$ fest, so folgt

$$\Phi(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{Spur} A(\xi)\, d\xi}\, \Phi(x_0) \qquad (x \in [a,b]).$$

11 Das Reduktionsverfahren von D'ALEMBERT

Bsp. Betrachte

$$A : (0,\infty) \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix}.$$

z.B. durch Erraten erhält man die Lösung

$$y_1 : (0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \qquad y_1(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}$$

des Differentialgleichungssystems $y'(x) = A(x)y(x)$. Der Ansatz zur Reduktion

$$y_2(x) = h(x)\cdot y_1(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(x) \end{pmatrix} = h(x)\begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(x) \end{pmatrix}$$

führt auf

$$\begin{aligned}
& h'(x)\cdot\begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \eta'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \eta(x) \end{pmatrix} \\
\iff \quad & h'(x)x^2 = -\eta(x) \quad \wedge \quad -h'(x)x + \eta'(x) = \frac{2}{x}\eta(x) \\
\implies \quad & -\left(-\frac{\eta(x)}{x^2}\right)x + \eta'(x) = \frac{2}{x}\eta(x) \\
\iff \quad & \eta'(x) = \frac{1}{x}\eta(x).
\end{aligned}$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist z.B. $\eta(x) = x$. Daraus ergibt sich $h'(x) = -\frac{x}{x^2} = -\frac{1}{x}$, also etwa $h(x) = -\log x$. Die Probe liefert

$$y_2(x) = -\log x \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2\cdot\log x \\ x\cdot\log x + x \end{pmatrix}$$

ist eine Lösug von $y'(x) = A(x)y(x)$. Außerdem ist

$$Y(x) := (y_1(x) \mid y_2(x)) = \begin{pmatrix} x^2 & -x^2\log x \\ -x & x\log x + x \end{pmatrix}$$

wegen $\det Y(x) = x^3 \neq 0$ $(x \in (0,\infty))$ ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung.

Bem. Es gilt $(\det Y(x))' = 3x^2$ und $(\operatorname{Spur} A(x))\cdot(\det Y(x)) = \frac{3}{x}\cdot x^3 = 3x^2$.
Um z.B. das Anfangswertproblem

$$y'(x) = A(x)y(x), \qquad y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu lösen, betrachtet man das lineare Gleichungssystem

$$Y(1)c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \iff \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man als Lösung des Anfangswertproblems die Funktion

$$y : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad y(x) = Y(x)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2x^2\log x \\ x + 2x\log x \end{pmatrix}.$$

12 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Satz 16 Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R}^{p\times p} \to \mathbb{R}^{p\times p}, \qquad \exp(A) := \mathrm{e}^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

hat folgende Eigenschaften

1. Ist $AB = BA$ für $A, B \in \mathbb{R}^{p\times p}$, so gilt $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B$.
2. Ist e^A regulär, so gilt $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$.
3. Sei zu einem festen $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ die Funktion

   $$Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{p\times p}, \qquad Y(x) = \mathrm{e}^{xA}$$

   definiert. Dann ist $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p\times p})$ und es gilt

   $$Y^{(n)}(x) = A^n \cdot \mathrm{e}^{xA} \qquad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0).$$

4. Ist $|||\cdot|||$ eine submultiplikative Norm auf $\mathbb{R}^{p\times p}$, $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ und $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

   $$|||\mathrm{e}^{x\cdot A}||| \leq \mathrm{e}^{|x|\cdot|||A|||}.$$

Bem.

- Eigenschaft (1) gilt nicht allgemein: Betrachte

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Mit $A^2 = B^2 = 0$ erhält man

  $$\begin{aligned} \mathrm{e}^A &= I + A + 0 + 0 + \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{e}^B &= I + B + \cdots \qquad\quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  und damit

  $$\begin{aligned} \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{e}^B \cdot \mathrm{e}^A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{e}^{A+B} &= \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Wegen (3) ist e^{xA} ein Fundamentalsystem von $y(x) = Ay(x)$, das bei $x = 0$ die Einheitsmatrix liefert.

- Sei $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ und $y : I \to \mathbb{C}^p$ mit $y(x) = \xi(x) + \mathrm{i}\cdot\eta(x)$ eine Lösung von $y'(x) = Ay(x)$. Dann gilt

$$\xi'(x) + \mathrm{i}\eta'(x) = A\xi(x) + \mathrm{i}A\eta(x)$$

und die Funktionen $\xi, \eta : I \to \mathbb{R}^p$ sind reelle Lösungen von $y'(x) = A\cdot y(x)$.

Bsp.

- Betrachte $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die zugehörige Differentialgleichung $y'(x) = Ay(x)$. Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2\mathrm{i})\cdot(\lambda - 2\mathrm{i}).$$

Damit sind $2\mathrm{i}$ und $-2\mathrm{i}$ die Eigenwerte von A. Zu $\lambda = -2\mathrm{i}$ ist z.B. $\binom{2\mathrm{i}}{1}$ ein Eigenvektor und daher

$$y(x) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\cdot\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = (\cos(2x) - \mathrm{i}\cdot\sin(2x))\cdot\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

eine komplexe Lösung der Differentialgleichung. Damit erhalten wir folgendes reelles Fundamentalsystem:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 2\sin(2x) & 2\cos(2x) \\ \cos(2x) & -\sin(2x) \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

- Betrachte $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

und die zugehörige Differentialgleichung $y'(x) = A\cdot y(x)$. Wegen

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 4)^2$$

ist 4 der einzige Eigenwert von A, ein Eigenvektor ist z.B. $v := \binom{1}{-1}$. Damit ist

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung. Ansatz für weitere Lösungen:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \mathrm{e}^{4x}(xv + w) \\
y_2(x) &= 4\mathrm{e}^{4x}(xv + w) + \mathrm{e}^{4x}v \\
&= A(\mathrm{e}^{4x}\cdot(xv + w)) = \mathrm{e}^{4x}(xAv + Aw) \\
\iff \quad 4\mathrm{e}^{4x}w + \mathrm{e}^{4x}v &= \mathrm{e}^{4x}Aw \\
\iff \quad 4w + v &= Aw \\
\iff \quad (A - 4I)w &= v
\end{aligned}$$

Lösen dieses linearen Gleichungssystems liefert z.B. $w = \binom{-1}{0}$. Also ist

$$y_2(x) = \mathrm{e}^{4x}\left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

eine weitere Lösung der Differentialgleichung und damit erhalten wir als Fundamentalsystem

$$Y(x) = \mathrm{e}^{4x} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ -1 & -x \end{pmatrix}.$$

Bem. Allgemein: Sei λ ein mehrfacher Eigenwert von A. Wähle einen Eigenvektor v_1 zu λ. Dann führt der Ansatz

$$y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot (xv_1 + v_2)$$

auf $(A - \lambda I)v_2 = v_1$, der Ansatz

$$y_3(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot (\tfrac{1}{2}x^2 v_1 + xv_2 + v_3)$$

auf $(A - \lambda I)v_3 = v_2$ und so weiter. Dies liefert Lösungen des Systems, solange die auftretenden Gleichungssysteme lösbar sind. Ist λ nicht reell, so sind Real- und Imaginärteil dieser Lösungen reelle Lösungen.

13 Explizite Differentialgleichungen höherer Ordnung

Bem. Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{kp}$ und $f : D \to \mathbb{R}^p$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(k)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)). \tag{$*$}$$

Differentialgleichungen dieser Form lassen sich wie folgt auf Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen: Betrachte

$$F : D \to \mathbb{R}^{kp}, \qquad F(x,z) = (z_2, z_3, \ldots, z_k, f(x,z))$$

$(z = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^{kp}, z_j \in \mathbb{R}^p)$ und die zugehörige Differentialgleichung erster Ordnung

$$z'(x) = F(x, z(x)), \tag{$**$}$$

d.h.:

$$\begin{pmatrix} z_1'(x) \\ \vdots \\ z_{k-1}'(x) \\ z_k'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ \vdots \\ z_k(x) \\ f(x, z_1(x), \ldots, z_k(x)) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

- Ist $y : I \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung von $(*)$, so ist

$$z : I \to \mathbb{R}^{kp}, \qquad z(x) := (y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x))$$

eine Lösung von $(**)$.

- Ist $z : I \to \mathbb{R}^p, z = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ eine Lösung von $(**)$, so ist

$$y : I \to \mathbb{R}^p, \qquad y(x) := z_1(x)$$

eine Lösung von $(*)$ und es gilt $y^{(j)} = z_{j+1}$ $(j = 0, \dots, k-1)$.

In diesem Sinne sind $(*)$ und $(**)$ „äquivalent“ und viele Ergebnisse lassen sich übertragen.

Satz 17 (Satz von Picard-Lindelöf) Es sei $f : [a,b] \times \mathbb{R}^{kp} \to \mathbb{R}^p$ stetig und bezüglich der letzten kp Variablen Lipschitz-stetig, d.h.

$$\exists \quad L \geq 0 \quad \forall \quad x \in [a,b], z, \tilde{z} \in \mathbb{R}^{kp} : \qquad ||f(x,z) - f(x,\tilde{z})||_1 \leq L||z - \tilde{z}||_2,$$

wobei $||\cdot||_1$ eine Norm des $\mathbb{R}^p$ und $||\cdot||_2$ eine Norm des $\mathbb{R}^{kp}$ sei. Dann ist das Anfangswertproblem

$$y^{(k)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x)), \qquad y^{(i)}(x_0) = y_i, (i = 0, \dots, k-1)$$

$(x_0 \in [a,b], y_i \in \mathbb{R}^p, i = 1, \dots, k-1)$ eindeutig lösbar auf $[a,b]$.

Satz 18 (Satz von Peano) Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{kp}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^p$ stetig und $(x_0, y_0, \dots, y_{k-1}) \in D$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y^{(k)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x)), \qquad y^{(i)}(x_0) = y_i, (i = 0, \dots, k-1)$$

eine Lösung.

Satz 19 Seien $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in C([a,b], \mathbb{R})$ und V die Menge aller Lösungen $y \in C^k([a,b], \mathbb{R})$ der *homogenen linearen Differentialgleichung k-ter Ordnung*

$$y^{(k)}(x) + a_{k-1}(x) y^{(k-1)}(x) + \dots + a_0(x) y(x) = 0.$$

Dann ist V ein reeller Vektorraum der Dimension k.

Satz 20 Seien $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$, p das charakteristische Polynom von

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-2} & -a_{k-1} \end{pmatrix},$$

also

$$p(x) = (-1)^k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Dann gilt: Ist λ eine r-fache, reelle Nullstelle von p, so entprechen ihr die r Lösungen

$$\mathrm{e}^{\lambda x}, x\mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots, x^{r-1}\mathrm{e}^{\lambda x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

der Differentialgleichung

$$y^{(k)}(x) + a_{k-1}y^{(k-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = 0.$$

Ist $\lambda = \xi + \mathrm{i} \cdot \eta$, also nicht reell, so erhält man die folgenden $2r$ reelle Lösungen auf $\mathbb{R}$:

$$x^q \mathrm{e}^{\xi x}\cos(\eta x), x^q \mathrm{e}^{\xi x}\sin(\eta x) \qquad (q = 0, \ldots, r-1).$$

Bem.

- Ist λ eine komplexe Nullstelle von p, dann auch $\overline{\lambda}$. λ und $\overline{\lambda}$ liefern nach obigem Satz dieselben Lösungen. Es genügt daher, eine der beiden Nullstellen zu betrachten.
- Der obige Satz liefert ein Fundamentalsystem zur Differentialgleichung
$$y^{(k)}(x) + a_{k-1}y^{(k-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = 0.$$
- Für die inhomogene Gleichung
$$y^{(k)}(x) + a_{k-1}y^{(k-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = r(x)$$
mit $r \in C([a,b], \mathbb{R})$ können für spezielle r geeignete Ansätze zur Berechnung einer Lösung y_s benutzt werden.

Bsp.

- Wir betrachten die Differentialgleichung
$$y^{(5)}(x) + 4y^{(4)}(x) + 2y'''(x) - 4y''(x) + 8y'(x) + 16y(x) = \mathrm{e}^x$$
und suchen alle Lösungen. Das charakteristische Polynom der zur homogenen Gleichung gehörigen Matrix A lautet
$$\begin{aligned} -p(\lambda) &= \lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16 \\ &= (\lambda+2)^3 \cdot (\lambda^2 - 1 + \mathrm{i}) \cdot (\lambda - 1 - \mathrm{i}). \end{aligned}$$
Damit ist
$$\{\mathrm{e}^{-2x}, x\mathrm{e}^{-2x}, x^2\mathrm{e}^{-2x}, \mathrm{e}^x\cos x, \mathrm{e}^x \sin x\}$$
ein reelles Fundamentalsystem. Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung betrachtet man den Ansatz $y_s(x) = c \cdot \mathrm{e}^x$ und erhält für c die Betimmungsgleichung
$$c\mathrm{e}^x \cdot (1 + 4 + 2 - 4 + 8 + 16) = \mathrm{e}^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = \frac{1}{27}.$$
Die Lösungen der Differentialgleichung sind damit genau die Funktionen
$$y(x) = \frac{1}{27}\mathrm{e}^x + c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2 x\mathrm{e}^{-2x} + c_3 x^2 \mathrm{e}^{-2x} + c_4\mathrm{e}^x\cos x + c_5\mathrm{e}^x \sin x$$
mit beliebigen $c_1, \ldots, c_5 \in \mathbb{R}$.

- Betrachte $y''(x) - y(x) = e^x$. Dann ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ das charakteristische Polynom und daher ist
$$\{e^x, e^{-x}\}$$
ein Fundamentalsystem für $y''(x) - y(x) = 0$. In diesem Fall führt der Ansatz $y_s = ce^x$ auf $c \cdot 0 = e^x$ und damit nicht zu einer speziellen Lösung.

14 Potenzreihendarstellung von Lösungen

Satz 21 Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen, $(x_0, y_0) \in D$ und $f \in C^\infty(D, \mathbb{R})$ eine Funktion, die in einer Umgebung von (x_0, y_0) in eine Potenzreihe entwickelbar ist, d.h. es existieren $a_{jk} \in \mathbb{R}$, $(j, k \in \mathbb{R})$ und ein $\varepsilon > 0$ so, daß die Reihe
$$\sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}(x - x_0)^j \cdot (y - y_0)^k, \qquad |x - x_0| \leq \varepsilon, |y - y_0| \leq \varepsilon$$
absolut konvergiert und der Reihenwert $f(x, y)$ ist. Ist $y : I = (\omega_-, \omega_+) \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems
$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0,$$
dann gibt es ein $R > 0$ mit
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (x \in U_R(x_0) \subseteq I),$$
wobei die $y^{(n)}(x_0)$ darstellbar sind als Summen von nichtnegativen Vielfachen von Produkten der a_{jk}.

Bem. Ähnliches gilt für Differentialgleichungssysteme und Systeme höherer Ordnung.

Bsp. Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ und das Anfangswertproblem
$$y'(x) = f(x, y) = x^2 + (y(x))^2, \qquad y(0) = 1.$$
f ist in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ein eine Potenzreihe entwickelbar, nämlich
$$f(x, y) = x^2 + (y - 1 + 1)^2 = \underbrace{x^2 + (y - 1)^2 + 2(y - 1) + 1}_{= \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} x^j (y-1)^k}.$$
Also besitzt die Lösung des obigen Anfangswertproblems in einer Umgebung um 0 eine Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Die a_n genügen dabei folgender Rekursion: Es gilt $a_0 = 1$ und
$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} x^n.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen liefert dies:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0^2, \\ 2a_2 &= 2a_0a_1, \\ 3a_3 &= 1+2a_0a_2+a_1^2 \\ 4a_4 &= 2a_0a_3+2a_1a_2\cdots \end{aligned}$$

Für die Lösung y gilt damit

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \cdots$$

15 Stetige Abhängigkeit von Lösungen

Satz 22 Es seien $f, f_k \in C([a,b] \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{N})$ mit

$$\forall \quad (x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}^p : \qquad ||f_k(x,y)|| \leq M$$

und

$$\forall \quad (x,y) \in [a,b] \times \overline{U_{(b-a+1)M}(0)} : \qquad \lim_{k\to\infty} f_k(x,y) = f(x,y).$$

Weiter sei $(x_{0_k})_{k=1}^{\infty}$ eine Folge in $[a,b]$, $(y_{0_k})_{k=1}^{\infty}$ eine Folge in $\overline{U_1(0)}$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $y_k : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y_k'(x) = f(x, y_k(x)), \qquad y_k(x_{0_k}) = y_{0_k}.$$

Dann besitzt $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ eine auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergente Teilfolge, deren Grenzfunktion $y : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

auf $[a,b]$ ist. Gilt zusätzlich $x_{0_k} \xrightarrow{k\to\infty} x_0$ und $y_{0_k} \xrightarrow{k\to\infty} y_0$, und ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x,y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

eindeutig lösbar, so konvergiert $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ auf $[a,b]$ gegen diese Lösung.

Satz 23 Sei $R > 0, y_0 \in \mathbb{R}^p$ und $f \in C([a,b] \times U_R(y_0), \mathbb{R}^p)$. Weiter sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x,y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

eindeutig lösbar auf $[a,b]$ und $y : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ sei die Lösung. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgenden Eigenschaften: Sind $\tilde{x}_0 \in [a,b], \tilde{y}_0 \in U_R(y_0)$, $\tilde{f} \in C([a,b] \times U_R(y_0), \mathbb{R}^p)$ und gilt

$$\forall \quad (x,y) \in [a,b] \times U_R(0) : \qquad ||f(x,y) - \tilde{f}(x,y)|| < \delta$$

sowie $||y_0 - \tilde{y}_0|| < \delta$ und $|x - x_0| < \delta$, dann gilt für jede nicht fortsetzbare Lösung $\tilde{y} : J \to \mathbb{R}^p$ des Anfangswertproblems

$$\tilde{y}'(x) = \tilde{f}(x, \tilde{y}(x)), \qquad \tilde{y}(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0 :$$

$J = [a,b]$ und $||y(x) - \tilde{y}(x)|| < \varepsilon$.

Bsp. Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$f_\lambda : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x,y) = \lambda y + \sin(\lambda^2 xy).$$

Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f_\lambda(x, y(x)) = \lambda y(x) + \sin(\lambda^2 x y(x)), \qquad y(0) = 1$$

nach PICARD-LINDELÖF auf $[0,1]$ eindeutig lösbar. Sei $y_\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ diese Lösung.
Beh.: Ist (λ_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_0$, so konvergiert (y_{λ_n}) gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen y_{λ_0}.
Bew.: Wähle $R > \max\limits_{x\in[0,1]} |y_{\lambda_0}(x) - 1|$. Wegen

$$f_{\lambda_n}(x,y) \xrightarrow{n\to\infty} f_{\lambda_0}(x,y)$$

gleichmäßig auf $[0,1] \times U_R(1)$ folgt die Behauptung aus Satz 23. ∎

Satz 24 Es sei $f \in C([a,b] \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ mit

$$\exists\, L > 0\ \forall\ (x,y),(x,\tilde{y}) \in [a,b] \times \mathbb{R}^p : \quad ||f(x,y) - f(x,\tilde{y})|| \leq L||y - \tilde{y}||.$$

$y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ seien die Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f(x, y_1(x)), \qquad & y_1(x_0) &= y_{0_1} \\ y_2'(x) &= f(x, y_2(x)), \qquad & y_2(x_0) &= y_{0_2}. \end{aligned}$$

Mit $||\cdot||_\infty$ sei die Norm

$$||y_1 - y_2||_\infty := \max_{x\in[a,b]} ||y_1(x) - y_2(x)||$$

bezeichnet. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} ||y_1(x) - y_2(x)|| \;&\leq\; \frac{L^{n+1}}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \cdot ||y_1 - y_2||_\infty \\ &\quad + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{L^k |x - x_0|^k}{k!} \right) ||y_{0_1} - y_{0_2}||. \end{aligned}$$

Bem. Hieraus folgt die stetige Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert in folgender Form

$$\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 : \qquad ||y_{0_1} - y_{0_2}|| < \delta \quad \Longrightarrow \quad ||y_1 - y_2||_\infty < \varepsilon.$$

16 Differentialungleichungen und ihre Anwendung auf Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt sei stets $p = 1$. Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $u, v \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ mit $(x, u(x)), (x, v(x)) \in D$ für $x \in [a,b]$.

Satz 25 Gilt $u(a) \le v(a)$ und

$$\forall \quad x \in [a,b]: \qquad u'(x) - f(x,u(x)) < v'(x) - f(x,v(x)),$$

so ist $u(x) < v(x)$ $(x \in (a,b])$.

Bem.

- Dies gilt i. A. nicht mehr, wenn man „$<$" durch „$\le$" ersetzt: Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2\sqrt{|y|}$ sowie

$$\begin{aligned} v : [0,1] \to \mathbb{R}: &\qquad v(x) = 0 \\ u : [0,1] \to \mathbb{R}: &\qquad u(x) = x^2. \end{aligned}$$

  Dann gilt $u(0) \le v(0)$ und

$$0 = u'(x) - f(x,u(x)) \le v'(x) - f(x,v(x)) = 0,$$

  aber $u(x) > v(x)$ $(x \in (0,1])$.

- Insbesondere gilt unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß D offen ist, folgendes: Sind $u, v \in C^1([x_0,b],\mathbb{R})$ mit $u(x_0) \le y_0 \le v(x_0)$ und gilt

$$u'(x) - f(x,u(x)) < 0 < v'(x) - f(x,v(x)) \qquad (x \in [x_0,b])),$$

  so gilt: Ist $y : [x_0,b] \to \mathbb{R}$ Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x,y(x)), \qquad y(x_0) = y_0,$$

  dann ist $u(x) < y(x) < v(x)$ $(x \in (x_0,b])$. Wegen $u(x_0) \le y_0 \le v(x_0)$ und

$$u'(x) - f(x,u(x)) < y'(x) - f(x,y(x)) < v'(x) - f(x,v(x))$$

  $(x \in [x_0,b])$ folgt dies aus Satz 25. Funktionen u, v mit obiger Eigenschaft heißen *Unter-* bzw. *Oberfunktionen* für $x \ge x_0$ zum Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x,y(x)), \qquad y(x_0) = y_0.$$

  Analoge Überlegungen kann man links von x_0 machen (vgl. dazu z.B. Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen, §9).

Bsp. Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{1+x^2}{2} + (y(x))^2, \qquad y(0) = 1 \tag{$*$}$$

Die Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} u'(x) &= (u(x))^2, &\qquad u(0) = 1 \\ v'(x) &= (v(x))^2 + 1, &\qquad v(0) = 1 \end{aligned}$$

auf $[0,b]$ mit $b \le \frac{\pi}{4}$ sind

$$u(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{bzw.} \qquad v(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4}).$$

Für $x \in [0,b]$ gilt

$$\underbrace{u'(x) - (u(x))^2}_{=0} - \frac{1+x^2}{2} < 0 < \underbrace{v(x) - (v(x))^2}_{=1} - \frac{1+x^2}{2}.$$

Insbesondere existiert die Lösung von $(*)$ nach rechts mindestens auf $[0, \frac{\pi}{4})$ und höchstens auf $[0,1)$ und es gilt

$$\frac{1}{1-x} < y(x) < \tan(x + \frac{\pi}{4}) \qquad (x \in (0, \frac{\pi}{4}))$$

Satz 26 Es sei $D = [a,b) \times \mathbb{R}$, $f \in C(D,\mathbb{R})$ und $(x_0, y_0) \in D$ ($b = \infty$ zugelassen). Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

nach rechts eine größte nicht fortsetzbare Lösung $\overline{y} : [x_0, \overline{\omega}_+) \to \mathbb{R}$ und eine kleinste nicht fortsetzbare Lösung $\underline{y} : [x_0, \underline{\omega}_-) \to \mathbb{R}$. Das bedeutet: Jede nicht fortsetzbare Lösung $y : [x_0, \omega_+) \to \mathbb{R}$ hat die Eigenschaften

$$\omega_+ \geq \min\{\overline{\omega}_+, \underline{\omega}_+\}$$

und es gilt

$$\underline{y}(x) \leq y(x) \leq \overline{y}(x) \qquad (x \in [x_0, \min\{\overline{\omega}_+, \underline{\omega}_+\})).$$

Die Lösungen $\underline{y}, \overline{y}$ sind eindeutig bestimmt und monoton wachsend vom Anfangswert abhängig.

Bem.

- Daraus folgt insbesondere: Ist das Anfangswertproblem

  $$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

  für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ nach rechts eindeutig lösbar, so hängt die Lösung monoton vom Anfangswert ab.

- Entsprechende Lösungen sind nach links möglich.

- z.B. für das Anfangswertproblem

  $$y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}, \qquad y(0) = 0$$

  ist

  $$\begin{aligned} \overline{y} &: [0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \overline{y}(x) = x^2 \\ \underline{y} &: [0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad \underline{y}(x) = 0. \end{aligned}$$

Satz 27 Sei $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(a) = y_0$$

eine größte und eine kleinste Lösung $\overline{y}, \underline{y} : [a,b] \to \mathbb{R}$. Diese sind eindeutig bestimmt und hängen monoton wachsend vom Anfangswert ab.

Satz 28 Ist $f : [a, b] \times \mathbb{R}$ stetig und lokal LIPSCHITZ-stetig bezüglich y und sind $u, v \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ mit

$$u'(x) - f(x, u(x)) \leq 0 \leq v'(x) - f(x, v(x)) \qquad (x \in [a, b])$$

und $u(a) \leq y_0 \leq v(a)$, so ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(a) = y_0$$

auf $[a, b]$ eindeutig lösbar und die Lösung $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ dieses Anfangswertproblems erfüllt

$$u(x) \leq y(x) \leq v(x) \qquad (x \in [a, b]).$$

Auch hier nennt man u bzw. v *Ober-* bzw. *Unterfunktion* zum Anfangswertproblem.

17 Randwertprobleme zweiter Ordnung

Def. 18 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{2p}$ und $f : [a, b] \times D \to \mathbb{R}^p$ eine Funktion. Das *Randwertproblem* besteht darin, Funktionen $y : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ zu finden mit

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \qquad R_a(y) = 0, R_b(y) = 0,$$

wobei $R_a(y)$ bzw. $R_b(y)$ Bedingungen an y für $x = a$ bzw. $x = b$ sind.

Bem. Typische Beispiele für $R_a(y)$ ($R_b(y)$ analog) sind

- Randbedingung *erster Art* oder DIRICHLET-Randbedingung:

$$R_a(y) = y(a) - \gamma$$

- Randbedingung *zweiter Art* oder NEUMANN-Randbedingung:

$$R_a(y) = y'(a) - \gamma$$

- Randbedingung *dritter Art* oder *gemischte* Randbedingung:

$$R_a(y) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) - \gamma.$$

Im Folgenden betrachten wir meist den Fall $p = 1$.

Bsp.

- Wir betrachten das Randwertproblem

$$y''(x) = -\pi^2 y(x), \qquad y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung sind

$$y(x) = c_1 \sin(\pi x) + c_2 \cos(\pi x) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ bel.}).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} c_1 \sin(\pi 0) + c_2 \cos(\pi 0) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad c_2 = 0 \\ c_1 \sin(\pi 1) + c_2 \cos(\pi 1) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad c_2 = 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen des Randwertproblems sind damit genau die Funktionen

$$y : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad y(x) = c_1 \cdot \sin(\pi x)$$

mit $c_1 \in \mathbb{R}$ beliebig. Das Randwertproblem hat also unendlich viele Lösungen.

- Betrachte das Randwertproblem

  $$y''(x) = -\pi^2 y(x) + 1, \qquad y(0) = 0, y(1) = 0.$$

  Die Lösungen der Differentialgleichung sind

  $$y(x) = c_1 \sin(\pi x) + c_2 \cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ bel.}).$$

  Es gilt

  $$\begin{aligned} c_1 \sin(\pi 0) + c_2 \cos(\pi 0) + \frac{1}{\pi^2} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{\pi^2} \\ c_1 \sin(\pi 1) + c_2 \cos(\pi 1) + \frac{1}{\pi^2} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad c_2 = +\frac{1}{\pi^2}. \end{aligned}$$

  Dieses Randwertproblem hat also keine Lösung.

- Betrachte das Randwertproblem

  $$y''(x) = -\pi^2 y(x), \qquad y(0) = 0, y'(1) = 0.$$

  Die Lösungen der Differentialgleichung sind wieder

  $$y(x) = c_1 \sin(\pi x) + c_2 \cos(\pi x) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ bel.}).$$

  Es gilt

  $$\begin{aligned} c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad c_2 = 0 \\ c_1 \pi \cos(\pi 1) - c_2 \pi \sin(\pi 1) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad c_1 = 0. \end{aligned}$$

  Das Randwertproblem hat damit genau eine Lösung, nämlich

  $$y : [0,1] \to \mathbb{R} : \qquad y(x) = 0.$$

Bem.

- *lineare Randwertprobleme*: Es seien $r, a_0, a_1 \in C([a,b], \mathbb{R})$ und $\gamma_a, \gamma_b, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ und $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$. Wir betrachten das Randwertproblem

  $$\left.\begin{array}{l} y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = r(x) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma_a \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_b. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Nun sei $y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x) = 0$ und $y_s : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung in $(*)$. Lösungen der Differentialgleichung in $(*)$ sind Funktionen

$$y(x) = y_s(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ bel.}).$$

Die Randbedingungen in $(*)$ sind genau dann erfüllt, wenn $\binom{c_1}{c_2}$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \alpha_1(y_s(a) + c_1y_1(a) + c_2y_2(a)) + \alpha_2(y_s'(a) + c_1y_1'(a) + c_2y_2'(a)) &= \gamma_a \\ \beta_1(y_s(b) + c_1y_1(b) + c_2y_2(b)) + \beta_2(y_s'(b) + c_1y_1'(b) + c_2y_2'(b)) &= \gamma_b \end{aligned}$$

ist. Bezeichnet man mit R die zu diesem linearen Gleichungssystem gehörige 2×2-Matrix, so folgt: $(*)$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn R invertierbar ist. Ob dies der Fall ist, hängt nicht vom gewählten Fundamentalsystem y_1, y_2 ab. Insbesondere ist $(*)$ genau dann eindeutig lösbar, wenn das zu $(*)$ gehörige *homogene* Randwertproblem

$$\left.\begin{array}{l} y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{array}\right\} \qquad (**)$$

nur trivial lösbar ist (d.h. nur $y : [a,b] \to \mathbb{R}, y(x) = 0$ ist Lösung). Ist also ein Fundamentalsystem y_1, y_2 bekannt, so ist die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit von $(*)$ ein Problem der linearen Algebra. Im Fall, daß $(**)$ mehrdeutig lösbar ist, ist wegen $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_1^2 > 0$ die Lösungsmenge

$$\{y \in C^2([a,b], \mathbb{R}),\ y \text{ löst } (**)\}$$

ein reeller Vektorraum der Dimension 1. In diesem Fall ist $(*)$ mehrdeutig lösbar oder unlösbar, je nachdem, ob der Vektor

$$\begin{pmatrix} \gamma_a - \alpha_1 y_s(a) - \alpha_2 y_s'(a) \\ \gamma_b - \beta_1 y_s(b) - \beta_2 y_s'(b) \end{pmatrix}$$

im Bild von R liegt oder nicht. Auch dies ist unabhängig von der Wahl von y_1, y_2, y_s.

- *nichtlineare Randwertprobleme*: Wir betrachten $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ und das Dirichlet-Randwertproblem

$$y''(x) = f(x, y(x)), \qquad y(0) = 0, y(1) = 0. \qquad (*)$$

Man kann $(*)$ wie folgt in eine Integralgleichung umschreiben: Wir betrachten die stetige Funktion

$$G : [0,1]^2 \to \mathbb{R}, \qquad G(x,\xi) := \begin{cases} \xi(x-1) & 0 \le \xi \le x \le 1 \\ x(\xi - 1) & 0 \le x \le \xi \le 1. \end{cases}$$

und die Abbildung

$$T : C([0,1], \mathbb{R}) \to C([0,1], \mathbb{R}), \qquad (Tu)(x) := \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi.$$

Dann gilt: $y \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ ist genau dann eine Lösung von $(*)$, wenn $y \in C([0,1],\mathbb{R})$ und $Ty = y$ ist.

Die Funktion G heißt GREEN-*sche Funktion* zum Randwertproblem $(*)$. Man kann auch andere Randwertprobleme mit Hilfe GREEN-scher Funktionen in Integralgleichungen umschreiben. Näheres dazu vgl. WALTER: Gewöhnliche Differentialgleichungen, §26.

Satz 29 Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte

$$\exists \quad L < \pi^2 \quad \forall \quad (x,y),(x,\tilde{y}) \in [0,1] \times \mathbb{R} : \qquad |f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|.$$

Dann hat das Randwertproblem

$$y''(x) = f(x, y(x)), \qquad y(0) = 0, y(1) = 0$$

genau eine Lösung.

Bem.

- Wie an den Beispielen zu Beginn dieses Abschnittes zu sehen ist, ist die Schranke π^2 optimal.
- Wird der obige Satz allgemeiner für $[a,b]$ statt $[0,1]$ formuliert, so ist π^2 durch $\frac{\pi^2}{(b-a)^2}$ zu ersetzen.

Satz 30 (Satz von SCORZA-DRAGONI) Ist $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so besitzt das Randwertproblem

$$y''(x) = f(x, y(x)), \qquad y(a) = 0, y(b) = 0$$

eine Lösung.

Bsp. Das Randwertproblem

$$y''(x) = \arctan(x \cdot \sqrt{|y(x)|}), \qquad y(0) = y(1) = 0$$

besitzt eine Lösung $y : [0,1] \to \mathbb{R}$, da

$$f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \arctan(x \cdot \sqrt{|y|})$$

stetig und beschränkt ist.

Bem.

- Man erhält aus obigem Satz auch die Lösbarkeit von Randwertproblemen der Form

  $$y''(x) = f(x, y(x)), \qquad y(a) = \gamma_a, y(b) = \gamma_b,$$

  falls $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist.

- Die Lösung ist i. A. nicht eindeutig bestimmt. Beispiel: Betrachte

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq -1 \\ -x & -1 < x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$$

  Dann sind u. a. alle Funktionen

$$y : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad y(x) = \alpha \sin(x)$$

  mit $|\alpha| < 1$ Lösungen des Randwertproblems

$$y''(x) = f(y(x)), \qquad y(0) = y(\pi) = 0.$$

- Der Satz gilt auch für das Randwertproblem

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \qquad y(a) = 0, y(b) = 0,$$

  falls $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist.

- Zum Beweis des Satzes kann z.B. einer der folgenden Fixpunktsätze herangezogen werden:

Satz 31 (Satz von Brouwer) Ist $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, beschränkt und abgeschlossen und $f : K \to K$ stetig, dann hat f einen Fixpunkt.

Satz 32 (Satz von Schauder) Ist $(E, ||\cdot||)$ ein Banach-Raum, $\emptyset \neq K \subseteq E$ beschränkt und abgeschlossen und $f : K \to K$ stetig mit $\overline{f(K)}$ kompakt, dann hat f einen Fixpunkt.

18 Autonome Differentialgleichungssysteme und Stabilität

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f \in C(D, \mathbb{R}^p)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in D$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(y(x)), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (*)$$

Bem.

- Ist $f(y_0) = 0$, so ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $y(x) = y_0$ eine Lösung von $(*)$.

- Ist $y : [x_0, \infty) \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung von $(*)$, so ist für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ auch

$$z : [x_0 - \xi, \infty) \to \mathbb{R}^p, \qquad z(x) = y(x + \xi)$$

  eine Lösung der Differentialgleichung in $(*)$ (jedoch i. A. nicht des Anfangswertproblems.)

- Ist $y : [x_0, \infty) \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung von $(*)$ und existiert $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) \in D$, so gilt
$$f(\lim_{x\to\infty} y(x)) = 0$$
und damit $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$.

Def. 19 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f \in C(D, \mathbb{R}^p)$ und $y_0 \in D$ eine Nullstelle von f.

1. y_0 heißt *Gleichgewichtspunkt* der Differentialgleichung $y'(x) = f(y(x))$, bzw. die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y(x) = y_0$ heißt *Gleichgewichtslösung* dieser Differentialgleichung.

2. y_0 heißt *stabil*, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit: Ist $y_1 \in D$ mit $||y_1 - y_0|| < \delta$ und $y : [x_0, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$ eine nach rechts nicht fortsetzbare Lösung des Anfangswertproblems
$$y'(x) = f(y(x)), \qquad y(x_0) = y_1,$$
so gilt $\omega_+ = \infty$ und $||y(x) - y_0|| < \varepsilon$ $(x \geq x_0)$.

3. y_0 heißt *instabil*, wenn y_0 nicht stabil ist.

4. y_0 heißt *asymptotisch stabil*, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit: Ist $y_1 \in D$ mit $||y_1 - y_0|| < \delta$ und $y : [x_0, \omega_+) \to \mathbb{R}^p$ eine nach rechts nicht fortsetzbare Lösung von
$$y'(x) = f(y(x)), \qquad y(x_0) = y_1,$$
so gilt $\omega_+ = \infty$, $||y(x) - y_0|| < \varepsilon$ $(x \geq x_0)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = y_0$.

Bem.

- Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Norm und der Wahl der Anfangsstelle x_0

- Ist y_0 asymptotisch stabil, dann ist y_0 stabil. Die Bedingung „zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $y_1 \in D$ mit $||y_1 - y_2|| < \delta$ jede nach rechts nicht fortsetzbare Lösung von
$$y'(x) = f(y(x)), \qquad y(x_0) = y_1$$
auf $[x_0, \infty)$ existiert und für $x \to \infty$ gegen y_0 konvergiert“, reicht allein nicht einmal für Stabilität aus.

- Ist y_0 stabil, so ist das Anfangswertproblem
$$y'(x) = f(y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$
eindeutig lösbar.

Bsp.

- (*Pendel mit Reibung*) Betrachte die Differentialgleichung

$$y''(x) = -\alpha y'(x) - \beta \sin(y(x)) \qquad (\alpha, \beta > 0).$$

Das zugehörige System erster Ordnung lautet

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ -\alpha y_2(x) - \beta \sin(y_1(x)) \end{pmatrix},$$

also $y'(x) = f(y(x))$ mit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_2 \\ -\alpha x_2 - \beta \sin x_1 \end{pmatrix}.$$

Diese Differentialgleichung modelliert das Verhalten einer Masse, die mit einer Stange an einem Punkt befestigt ist. Anschaulich erkennt man: Der Punkt $(0,0)$ ist asymptotisch stabil (Bea.: $f(0,0) = (0,0)$). In diesem Fall hängt das Pendel nach unten und bei einer geringfügigen Auslenkung wird es sich diesem Punkt wieder annähern. Dagegen ist der Punkt $(\pi, 0)$ instabil (Bea.: $f(\pi, 0) = (0,0)$). In diesem Fall steht das Pendel senkrecht nach oben und eine geringfügige Auslenkung würde dazu führen, daß es umkippt.

- (*Räuber-Beute-Modell*) Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) \cdot (a - b y_2(x)) \\ y_2'(x) &= y_2(x) \cdot (-c + d y_1(x)) \end{aligned}$$

für $a, b, c, d > 0$. z.B. läßt sich $y_1(x)$ als Anzahl der Beutetiere zur Zeit x und $y_2(x)$ als Anzahl der Räuber zur Zeit x interpretieren. Hier ist

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1(a - b x_2) \\ x_2(-c + d x_1) \end{pmatrix}.$$

Die Gleichgewichtspunkte lauten hier $(0,0)$ und $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. (vgl. Seite 41 oder Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen)

Satz 33 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$. Sei $y_0 \in D$ mit $f(y_0) = 0$ und für jeden Eigenwert λ der $p \times p$-Matrix $f'(y_0)$ gelte $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Dann ist y_0 asymptotisch stabil.

Bem. Ist $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ und gilt $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für jeden Eigenwert λ von A, so ist nach obigem Satz y_0 asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt von $y'(x) = Ay(x)$. Dies folgt auch aus den Ergebnissen von Abschnitt 12. Beachte: In diesem Fall ist A invertierbar, also 0 der einzige Gleichgewichtspunkt von $y'(x) = Ay(x)$.

Satz 34 Sei $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ und $c \in \mathbb{R}$ so, daß für jeden Eigenwert λ von A gilt $\operatorname{Re} \lambda < c$. Dann existiert ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf dem $\mathbb{R}^p$ mit

$$\forall \quad y \in \mathbb{R}^p : \qquad \langle y, Ay \rangle \leq c \cdot ||y||_0^2.$$

Dabei ist $||y||_0 := \sqrt{\langle y, y \rangle}$ $(y \in \mathbb{R}^p)$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erzeugte Norm.

Bsp.

- Wir betrachten nochmals das Pendel von Seite 38. Es gilt $f(0,0) = (0,0)$. und

  $$f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta\cos 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

  Diese Matrix hat das charakteristische Polynom

  $$p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta.$$

  Für $\frac{\alpha^2}{4} - \beta \geq 0$ liefert das die Eigenwerte

  $$-\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta} < 0$$

  und für $\frac{\alpha^2}{4} - \beta < 0$ erhält man die komplexen Eigenwerte

  $$-\frac{\alpha}{2} \pm \mathrm{i} \cdot \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}},$$

  deren Realteil, $-\frac{\alpha}{2}$, negativ ist. Damit ist nach obigem Satz $(0,0)$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

- Betrachte das System $y'(x) = f(y(x))$ mit

  $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin x_2 - 2x_1 \\ \sin x_1 - 3\sin x_2 \end{pmatrix}.$$

  Es gilt $f(0, 2\pi) = (0,0)$. Hier ist

  $$f'(0,2\pi) = \begin{pmatrix} -2 & \cos(2\pi) \\ \cos 0 & -3\cos(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

  Diese Matrix hat die Eigenwerte

  $$\lambda_1 = \underbrace{-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}_{<0} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \underbrace{-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}}_{<0}.$$

  Also ist $(0, 2\pi)$ asymptotisch stabil.

Satz 35 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$, $y_0 \in D$ mit $f(y_0) = 0$ und für einen Eigenwert λ von $f'(y_0)$ gelte $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Dann ist y_0 instabil.

Bsp. Betrachte nochmals das Pendel mit Reibung. Der Punkt $(\pi, 0)$ ist eine Nullstelle von f und es gilt

$$f'(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix lauten

$$-\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta}.$$

Wegen $-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta} > 0$ ist nach obigem Satz $(\pi, 0)$ instabil.

Bem. Haben in einem linearen System alle Eigenwerte von A nicht-positive Realteile, dann ist folgende Stabilitätsaussage möglich: Existiert zu einem Eigenwert λ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$ ein nichttrivialer JORDAN-Block, so ist 0 instabil. Sind alle JORDAN-Blöcke zu allen Eigenwerten λ von A mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$ trivial, so ist A stabil. Dieses Kriterium läßt sich nicht auf nichtlineare System übertragen

Bsp.

- Betrachte $y'(x) = f(y(x))$ mit
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(y) = -y^3.$$
Dann gilt $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ und das Anfangswertproblem
$$y'(x) = f(y(x)) = -y^3(x), \qquad y(0) = y_0$$
hat die Lösung
$$y : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad y(x) = \frac{y_0}{\sqrt{2xy_0^2 + 1}}.$$
Somit ist 0 asymptotisch stabil.

- Betrachte $y'(x) = f(y(x))$ mit
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(y) = y^3.$$
Dann gilt $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ und das Anfangswertproblem
$$y'(x) = f(y(x)) = y^3(x), \qquad y(0) = y_0$$
hat die Lösung
$$y : [0, \frac{1}{2y_0^2}) \to \mathbb{R}, \qquad y(x) = \frac{y_0}{\sqrt{1 - 2xy_0^2}}$$
Somit ist 0 instabil.

Def. 20 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^p$ lokal LIPSCHITZ-stetig. Es gelte $0 \in D$ und $f(0) = 0$. Eine Funktion $V : U_r(0) \to \mathbb{R}$ mit $U_r(0) \subseteq D$ heißt LIAPUNOV-*Funktion* zur Differentialgleichung
$$y'(x) = f(y(x))$$
im Punkt 0, falls gilt

1. $V \in C^1(U_r(0), \mathbb{R})$
2. $V(0) = 0$, $V(y) > 0$ $(y \in U_r(0) \setminus \{0\})$
3. $(\operatorname{grad} V(y)) \cdot f(y) \leq 0$ $(y \in U_r(0))$

Bem. Analog lassen sich LIAPUNOV-Funktionen für andere Nullstellen y_0 von f definieren. Die folgenden Sätze gelten dann analog.

Satz 36 Besitzt die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(y(x))$$

eine LIAPUNOV-Funktion, so ist 0 stabil. Gilt zusätzlich

$$(\operatorname{grad} V(y)) \cdot f(y) < 0 \qquad (y \in U_r(0) \setminus \{0\}),$$

dann ist 0 asymptotisch stabil.

Bsp.

- Wir betrachten $y'(x) = f(y(x))$ mit

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(y_1, y_2, y_3) := \begin{pmatrix} 2y_2(y_3 - 1) \\ -y_1(y_3 - 1) \\ -y_3^3 \end{pmatrix}.$$

  Es gilt $f(0) = 0$ und

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  $f'(0)$ hat die Eigenwerte $0, \sqrt{2}\mathrm{i}, -\sqrt{2}\mathrm{i}$. Die Sätze 33 und 34 liefern damit keine Entscheidung über das Stabilitätsverhalten von 0. Betrachte nun

$$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad V(y_1, y_2, y_3) := y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2.$$

  Es gilt $V \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $V(0) = 0$, $V(y) > 0$ $(y \neq 0)$ und

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} V(y)) \cdot f(y) &= (2y_1, 4y_2, 2y_3) \cdot \begin{pmatrix} 2y_2(y_3 - 1) \\ -y_1(y_3 - 1) \\ -y_3^3 \end{pmatrix} \\ &= 4y_1y_2(y_3 - 1) - 4y_2y_1(y_3 - 1) - 2y_3^4 = -2y_3^4 \leq 0 \end{aligned}$$

  für $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Damit ist 0 stabil.

- Wir betrachten nochmals das Räuber-Beute-Modell von Seite 38, also die Differentialgleichung $y'(x) = f(y(x))$ mit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(y) = f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} ay_1 - by_1y_2 \\ -cy_2 + by_1y_2 \end{pmatrix}$$

  (für $a, b, c, d > 0$). f hat die beiden Gleichgewichtpunkte $(0, 0)$ und $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Mit Satz 34 ist leicht zusehen, daß $(0, 0)$ instabil ist. Wir betrachten die Stelle $y_0 = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Die Eigenwerte von $f'(y_0)$ sind imaginär, die Sätze 33 und 34 liefern also keine Entscheidung über das Stabilitätsverhalten von y_0. Wir betrachten speziell $a = b = c = d = 1$ (damit also $y_0 = (1, 1)$) Sei

$$V : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}, \qquad V(y_1, y_2) := y_1 + y_2 - \log(y_1 \cdot y_2) - 2.$$

Dann gilt $V \in C^1((0,\infty)^2)$, $V(1,1) = 0$, $V(y_1, y_2) > 0$ für $(y_1, y_2) \in (0,\infty)^2 \setminus \{(1,1)\}$ und

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} V(y)) \cdot f(y) &= (1 - \frac{1}{y_1}, 1 - \frac{1}{y_2}) \cdot \begin{pmatrix} y_1 - y_1 y_2 \\ -y_2 + y_1 y_2 \end{pmatrix} \\ &= y_1 - y_1 y_2 - 1 + y_2 - y_2 + 1 + y_1 y_2 - y_1 = 0.\end{aligned}$$

Nach obigem Satz ist $(1,1)$ damit stabil. Insbesondere ist hier $V(y(x))$ konstant und daher $(1,1)$ nicht asymptotisch stabil.

Satz 37 (Satz von Chetaev) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^p$ lokal Lipschitz-stetig und $f(0) = 0$. Es existiere ein $\varepsilon_0 > 0$ und $G \subseteq D$ offen mit $\overline{U_{\varepsilon_0}(0)} \subseteq D$, $0 \in \partial G$ und eine Funktion

$$V \in C(\overline{G}, \mathbb{R}) \cap C^1(G, \mathbb{R})$$

mit

1. $V(y) > 0$ $(y \in G)$ und $V(y) \leq M$ $(y \in \overline{G})$ für ein $M > 0$.
2. $(\operatorname{grad} V(y)) \cdot f(y) \geq h(V(y))$ $(y \in G)$ für eine stetige, streng monoton wachsende Funktion $h : [0, M] \to \mathbb{R}$ mit $h(0) = 0$
3. $V(y) = 0$ $(y \in \partial G \cap U_{\varepsilon_0}(0))$

Dann ist 0 instabil.

Bem. Dieser Satz gilt analog, wenn 0 durch eine allgemeine Nullstelle y_0 von f ersetzt wird.

Bsp. Betrachte

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(y_1, y_2) := \begin{pmatrix} y_1^3 - y_1 + y_2 \\ y_2^3 + y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ ist Gleichgewichtspunkt der Differentialgleichung $y'(x) = f(y(x))$. Es sei $\varepsilon_0 := 1$, $||\cdot||$ die Euklid-Norm, $G = (0,2)^2$ und

$$V : \overline{G} \to \mathbb{R}, \qquad V(y) = V(y_1, y_2) := y_1 \cdot y_2.$$

Dann gilt: $V(y_1, y_2) > 0$ $((y_1, y_2) \in G)$, $0 \in \partial G$, $V(y_1, y_2) \leq 4$ $((y_1, y_2) \in \overline{G})$ und $V(y_1, y_2) = 0$ $((y_1, y_2) \in \partial G \cap U_1(0))$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} V(y_1, y_2)) \cdot f(y_1, y_2) &= (y_2, y_1) \cdot \begin{pmatrix} y_1^3 - y_1 + y_2 \\ y_2^3 + y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= y_2 y_1^3 - y_2 y_1 + y_2^2 + y_1 y_2^3 + y_1^2 + y_1 y_2 \\ &\geq y_2 y_1^3 + y_1 y_2^3 = y_1 y_2 (y_1^2 + y_2^2) \geq 2(y_1 y_2)^2 \\ &=: h(V(y_1, y_2))\end{aligned}$$

mit $h(t) := 2t^2$. Damit ist 0 instabil.

Bem. (zu nichtautonomen Systemen) Betrachte $\gamma \in C^1([0,\infty), \mathbb{R}^p)$ beliebig. Dann ist γ z.B. eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = f(y(x))$ mit

$$f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p, \qquad f(x, y) = ||\gamma(x) - y|| \cdot y + \gamma'(x).$$

Damit ist jede stetig differenzierbare Funktion Lösung einer Differentialgleichung.

19 Zusammenhängende Mengen und der Satz von KNESER

Es sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter linearer Raum, also V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $||\cdot||$ eine Norm auf V.

Def. 21 Es sei $M \subseteq V$.

1. M heißt *wegzusammenhängend*, falls gilt: Für alle $y, \tilde{y} \in M$ existiert eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to M$ mit $\gamma(a) = y$ und $\gamma(b) = \tilde{y}$.
2. M heißt *unzusammenhängend*, falls gilt: Es gibt offene Mengen O_1 und O_2 mit
   (a) $M \subseteq O_1 \cup O_2$
   (b) $O_1 \cap O_2 = \emptyset$
   (c) $M \cap O_j \neq \emptyset$ $(j = 1, 2)$.
3. M heißt *zusammenhängend*, falls M nicht unzusammenhängend ist.

Bem.

- Jede endliche Teilmenge von V, die aus mehr als einem Punkt besteht, ist unzusammenhängend.
- Jede konvexe Teilmenge von V ist wegzusammenhängend
- V und $\emptyset$ sind zusammenhängend
- Sind $M_1, M_2 \subseteq V$ zusammenhängend und $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Dann ist $M_1 \cup M_2$ zusammenhängend, $M_1 \cap M_2$ aber i.A. nicht.
- Ist $M \subseteq V := \mathbb{R}$ so gilt: M ist genau dann wegzusammenhängend, wenn M zusammenhängend ist und genau dann zusammenhängend, wenn M ein Intervall ist.
- Ist $M \subseteq V$ wegzusammenhängend, dann ist M auch zusammenhängend.
- Ist $M \subseteq V$ zusammenhängend, dann ist auch $\overline{M}$ zusammenhängend.
- Für $\dim V \geq 2$ (insbesondere auch für $\dim V = \infty$) existieren Mengen $M \subseteq V$, die zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend sind, z.B. im $\mathbb{R}^2$ die Menge
$$B := \{(x, \sin\frac{1}{x}) : x \in (0,1]\}.$$
- Ist $M \subseteq V$ offen, dann ist M genau dann zusammenhängend, wenn M wegzusammenhängend ist.
- Sind $(V, ||\cdot||_1)$ und $(W, ||\cdot||_2)$ normierte lineare Räume, $D \subseteq V$ offen, $M \subseteq D$ zusammenhängend und $f \in C(D, W)$, dann ist $f(M)$ zusammenhängend

Satz 38 (Satz von KNESER) Es sei $f : [0,1] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ stetig und beschränkt. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(0) = 0. \tag{$*$}$$

Dann ist

$$M := \{y : [0,1] \to \mathbb{R}^p : \; y \text{ ist Lösung von } (*)\}.$$

als Teilmenge des BANACH-Raums $(C([0,1], \mathbb{R}^p), ||\cdot||_\infty)$ zusammenhängend.

Bsp. Wir betrachten

$$f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := 2\sqrt{\min\{x^2, |y|\}}.$$

f ist stetig und beschränkt. Für jede Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(0) = 0$$

gilt

$$|y(x)| \leq \int_0^x |f(t, y(t))| dt \leq \int_0^x 2t dt = x^2.$$

Also gilt $y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}$ und somit

$$M := \{y_a : [0,1] \to \mathbb{R} : \; y_a(x) = \max\{0, (x-a)^2\}, \; a \in [0,1]\}.$$

M ist wegzusammenhängend: Wähle $y_a, y_b \in M$. Dann ist die Abbildung

$$\gamma : [a,b] \to M, \qquad \gamma(t) := y_t$$

eine stetige Abbildung, die y_a mit y_b verbindet.

Bem.

- Analoges gilt wieder allgemeiner für ein Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(a) = y_0$$

- M aus obigem Satz heißt *Lösungstrichter* oder KNESER-*Trichter* zu $(*)$.

- Sei $x_0 \in [0,1]$ fest. Die Abbildung

$$P_{x_0} : C([0,1], \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^p, \qquad P_{x_0}(u) := u(x_0)$$

ist stetig. Mit M ist daher auch

$$P_{x_0}(M) = \{y(x_0) : \; y \in M\}$$

eine zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^p$. Im Fall $p = 1$ ist $P_{x_0}(M)$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall, im Fall $p > 1$ kann $P_{x_0}(M)$ viel komplizierter sein.

Def. 22 Sei $y : [x_0, \infty) \to \mathbb{R}^p$ stetig. Die Menge

$$\omega_+(y) := \{z \in \mathbb{R}^p : \exists\, (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq [x_0, \infty) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \wedge \lim_{n\to\infty} y(x_n) = z\}$$

heißt *Grenzmenge* der Funktion y. (Analog definiert man $\omega_-(y)$ für Funktionen $y : (-\infty, x_0] \to \mathbb{R}^p$)

Bem.

- Es gilt: Ist y beschränkt (also $||y(x)|| \leq c$ $(x \geq x_0)$ für ein $c > 0$), so ist $\omega_+(y)$ beschränkt und abgeschlossen (somit kompakt), nicht leer und zusammenhängend.

- Ist $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ lokal LIPSCHITZ-stetig und das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

auf $[x_0, \infty)$ lösbar, so kann man die Grenzmenge $\omega_+(y)$ der Lösung $y : [x_0, \infty) \to \mathbb{R}^p$ dieses Anfangswertproblems betrachten und schreibt dann auch $\omega_+(y_0)$, da diese Menge von y_0, aber nicht von y abhängt. Des weiteren gilt hier: Ist y beschränkt, so ist $\omega_+(y_0)$ kompakt, zusammenhängend und invariant, d.h. ist $z_0 \in \omega_+(y_0)$ und $z : [x_0, \infty) \to \mathbb{R}^p$ die nach rechts nicht fortsetzbare Lösung von

$$z'(x) = f(z(x)), \qquad z'(x_0) = z_n,$$

so gilt $\omega_+ = \infty$ und $z(x) \in \omega_+(y_0)$ $(x \geq x_0)$.

Index