Analysis I

Manuel Kauers
nach einer Vorlesung von
Dr. G. Herzog

21. Oktober 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen werden axiomatisch eingeführt.

Axiom 1 $\forall \quad a,b,c \in \mathbb{R}: \qquad (a+b)+c = a+(b+c)$

Axiom 2 $\exists \quad 0 \in \mathbb{R} \quad \forall \quad a \in \mathbb{R}: \qquad a+0 = a$

Axiom 3 $\forall \quad a \in \mathbb{R} \quad \exists \quad (-a) \in \mathbb{R}: \qquad a+(-a) = 0$

Axiom 4 $\forall \quad a,b \in \mathbb{R}: \qquad a+b = b+a$

Axiom 5 $\forall \quad a,b,c \in \mathbb{R}: \qquad (ab)c = a(bc)$

Axiom 6 $\exists \quad 1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \forall \quad a \in \mathbb{R}: \qquad a \cdot 1 = a$

Axiom 7 $\forall \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \exists \quad a^{-1} \in \mathbb{R}: \qquad a \cdot a^{-1} = 1$

Axiom 8 $\forall \quad a,b \in \mathbb{R}: \qquad a \cdot b = b \cdot a$

Axiom 9 $\forall \quad a,b,c \in \mathbb{R}: \qquad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Schreibweisen: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, so sei $a - b := a + (-b)$ und für $a \neq 0$ sei $\frac{b}{a} := b \cdot a^{-1}$.

Axiom 10 $\forall \quad a, b \in \mathbb{R}: \qquad a \leq b \ \vee \ b \leq a$

Axiom 11 $a \leq b \ \wedge \ b \leq a \quad \Longrightarrow \quad a = b$

Axiom 12 $a \leq b \ \wedge \ b \leq c \quad \Longrightarrow \quad a \leq c$

Axiom 13 $a \leq b \quad \Longrightarrow \quad a + c \leq b + c \quad \forall \quad c \in \mathbb{R}$

Axiom 14 Aus $a \leq b$ und $0 \leq c$ folgt $a \cdot c \leq b \cdot c$

Schreibweisen:

$$\begin{array}{lcl} b \geq a & :\Longleftrightarrow & a \leq b \\ a < b & :\Longleftrightarrow & a \leq b \ \wedge \ a \neq b \\ b > a & :\Longleftrightarrow & a < b. \end{array}$$

Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ heißen die Mengen

$$\begin{array}{ll} [a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \ \wedge \ x \leq b\}, & (a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x \ \wedge \ x < b\} \\ (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \ \wedge \ x \leq b\} & [a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \ \wedge \ x < b\} \\ (-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\} & (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\ (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\} & [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \end{array}$$

Intervalle. a und b heißen *Intervallgrenzen*. Für $a \in \mathbb{R}$ wird der *Betrag* $|a|$ definiert als

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Für den Betrag gelten folgende Regeln:

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = 0 \iff a = 0$
3. $|a| = |-a|$
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5. $a \leq |a|$, $-a \leq |a|$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (*Dreiecksungleichung*)
7. $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Def. 1 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \emptyset$. M heißt nach oben [unten] *beschränkt* $:\Longleftrightarrow$

$$\exists \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad \forall \quad x \in M: \qquad x \leq \gamma \quad [x \geq \gamma]$$

In diesem Fall heißt γ obere [untere] *Schranke* von M. Ist γ die kleinste obere [größte untere] Schranke von M, d.h. gilt für jede obere [untere] Schranke $\tilde{\gamma}$ von M: $\gamma \leq \tilde{\gamma}$ $[\gamma \geq \tilde{\gamma}]$, so heißt γ das *Supremum* [*Infimum*], Schreibweise $\gamma = \sup M$ $[\gamma = \inf M]$. Hat die Menge M ein Supremum [Infimum] und gilt $\sup M \in M$ $[\inf M \in M]$, dann heißt diese Zahl *Maximum* [*Minimum*] von M, Schreiweise: $\max M$ $[\min M]$.

Bsp. $\inf[1,2] = 1 = \min[1,2]$. $\inf(1,2) = 1$, $\min(1,2)$ existiert nicht.

Axiom 15 Ist $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ nach oben beschränkt, so existiert $\sup M$.

Satz 1 Ist $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ nach unten beschränkt, so existiert $\inf M$.

Def. 2 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. M heißt *beschränkt*, falls gilt: M ist nach oben und nach unten beschränkt.

Ist M beschränkt, so gilt:

$$\exists \quad c > 0 \quad \forall \quad x \in M : \qquad |x| \leq c$$

Satz 2 Es sei $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt

1. A ist beschränkt $\Longrightarrow \inf A \leq \sup A$
2. A ist nach oben beschränkt $\Longrightarrow$ B ist nach oben beschränkt und es gilt $\sup A \leq \sup B$
3. A ist nach unten beschränkt $\Longrightarrow$ B ist nach unten beschränkt und es gilt $\inf B \geq \inf A$
4. Ist A nach oben [unten] beschränkt und γ eine obere [untere] Schranke von A, so gilt

   $$\gamma = \sup A \; [\gamma = \inf A] \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, x \in A : \quad x > \gamma - \varepsilon \; [x < \gamma + \varepsilon]$$

2 Natürliche Zahlen

Def. 3 $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Induktionsmenge* oder *induktiv*, falls gilt $1 \in A$ und aus $x \in A$ folgt $x + 1 \in A$.

$$\mathbb{N} := \bigcup_{A \text{ ist IM}} A$$

heißt *Menge der natürlichen Zahlen.*

Satz 3 Es gilt:

1. $\mathbb{N}$ ist Induktionsmenge
2. $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.
3. $\forall \quad x \in \mathbb{R} \quad \exists \quad n \in \mathbb{N} : \qquad n > x$
4. Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ und A ist Induktionsmenge, so gilt $A = \mathbb{N}$

Def. 4 Es seien

1. $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$,
2. $\mathbb{Z} := \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}_0$ (Menge der *ganzen* Zahlen),
3. $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (Menge der *rationalen* Zahlen)

3 Folgen, Abzählbarkeit

Def. 5 Es seien $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to B$ eine Funktion.

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$$

heißt *Bildmenge* von f.

1. f heißt *surjektiv* $:\Longleftrightarrow f(A) = B$
2. f heißt *injektiv* $:\Longleftrightarrow$
$$\forall \quad x, y, \in A : \qquad f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y$$
3. f heißt *bijektiv* $:\Longleftrightarrow f$ ist surjetiv und injektiv

Def. 6 $X \neq \emptyset$ sei eine Menge. Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to X$ heißt *Folge* in X. Man schreibt a_n statt $a(n)$ und (a_n) oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $a_1, a_2, \ldots$ statt a. Für $X = \mathbb{R}$ spricht man von *rellen Folgen* oder *Zahlenfolgen*.

Def. 7 Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge.

1. X heißt *endlich* $:\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und eine surjektive Funktion $f : \{1, \ldots, n\} \to X$, also $X = \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$
2. Ist X nicht endlich, so heißt X *unendlich*
3. X heißt *abzählbar* $:\Longleftrightarrow$ Es gibt eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to X$ mit $X = \{a_1, a_2, \ldots\}$

Bem. Endliche Mengen sind auch abzählbar, z.B. ist $\{1\} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ mit $a_n = 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

Bsp.

- $\mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich, denn
$$\mathbb{N} = \{a_1, a_2, \ldots\} \qquad a_n := n, \quad (n \in \mathbb{N})$$
- $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich, denn
$$\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \qquad a_1 := 0,\ a_{2n} = n,\ a_{2n+1} = -n, \quad (n \in \mathbb{N})$$
- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich, denn die Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit
$$f(n, m) := n + \frac{(n + m - 1)(n + m - 2)}{2}$$
ist bijektiv und für $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n, m) := \frac{n}{m}$ gilt
$$g(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{Q} : \quad x > 0\} := \{a_1, a_2, \ldots\}$$
mit $a_n := g(f^{-1}(n))$. Mit $b_1 := 0, b_{2n} := a_n, b_{2n+1} := -a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist auch $\mathbb{Q}$ abzählbar.

- $\mathbb{R}$ ist überabzählbar
- Sei X die Menge aller Folgen (a_n), mit $a_n \in \{0,1\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt: X ist überabzählbar.

Satz 4 Sei $\emptyset \neq B \subseteq A$ und A abzählbar. Dann ist auch B abzählbar.

Satz 5 $x_1, x_2, \ldots$ seien abzählbar unendlich viele Mengen ($\neq \emptyset$), jede dieser Mengen sei abzählbar unendlich. Dann ist auch

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} x_j$$

abzählbar.

4 Einige Formeln

1. Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

$a^0 := 1$. Ist $a \neq 0$, so sei $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $n! := 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ (n *Fakultät*). Weiter sei $0! := 1$.

3. Für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ sei

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ heißt *Binomialkoeffizient*. Es gilt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \text{sowie} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

4. Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt die BERNOULLI*sche Ungleichung*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

5. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$$

Mit $a = 1, b = t \neq 1$ folgt daraus

$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$$

6. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt die *Binomische Formel*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

5 Wurzeln

Def. 8 Sei $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $x \geq 0$ mit $x^n = a$. x heißt n-te *Wurzel* aus a. Schreibweise $x := \sqrt[n]{a}$. Es sei $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$. Für $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ schreibt man auch $a^{\frac{m}{n}}$.

Bem.

- $\sqrt[n]{x}$ ist nur für $x \geq 0$ definiert.
- $\forall \quad a \geq 0: \qquad \sqrt[n]{a} \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N})$
- $\forall \quad b \in \mathbb{R}: \qquad \sqrt{b^2} = |b|$
- Die Gleichung $x^2 = 4$ hat zwei Lösungen:

$$x = +\sqrt{4} \quad \vee \quad x = -\sqrt{4}$$

6 Konvergente Folgen

Def. 9 Es sei (a_n) eine reelle Folge. (a_n) heißt nach unten [oben] *beschränkt* $:\Longleftrightarrow$ $\{a_1, a_2, \ldots\}$ ist nach unten [oben] beschränkt.

Bem.

- Eine Folge (a_n) ist beschränkt $:\Longleftrightarrow$

$$\exists \quad c > 0 \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}: \qquad |a_n| \leq c$$

- Sei (a_n) nach oben beschränkt. Dann heißt

$$\sup_{n=1}^{\infty} a_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$$

  Supremum von (a_n). Analog ist für nach unten beschränkte Folgen das *Infimum* definiert.

Def. 10 Eine Folge (a_n) heißt *konvergent* $:\Longleftrightarrow$

$$\exists\ a \in \mathbb{R}\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_0: \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Ist (a_n) konvergent, so heißt a *Grenzwert* oder *Limes* von (a_n). Schreibweisen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \qquad \text{oder} \qquad a_n \longrightarrow a\ (n \to \infty)$$

Ist (a_n) nicht konvergent, so heißt (a_n) *divergent.*

Def. 11 $U_\varepsilon(x_0)$ mit $U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}: \ |x - x_0| \leq \varepsilon\}$ heißt *Umgebung* um x_0

Satz 6 Sei (a_n) eine konvergente Folge. Dann gilt:

1. Der Grenzwert von (a_n) ist eindeutig bestimmt.
2. (a_n) ist beschränkt.

Bem. Bei Konvergenzfragen kommt es auf endlich viele Folgenglieder nicht an, d.h. sind (a_n) und (b_n) Folgen und existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall \quad n \geq m: \qquad a_n = b_n,$$

so gilt (a_n) konvergiert $\Longleftrightarrow$ (b_n) konvergiert. Im Konvergenzfall gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Bsp.

- Ist (a_n) eine Folge, $m \in \mathbb{N}$ mit $a_n = c$ $(n \geq m)$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- Die Folge (a_n) mit $a_n := n$ ist divergent
- Die Folge (b_n) mit $b_n := (-1)^n$ ist divergent
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1.$

Bem. Sei $k \in \mathbb{Z}$ fest.

$$a : \{n \in \mathbb{Z} : \ n \geq k\} \longrightarrow X(\neq \emptyset)$$

heißt ebenfalls *Folge* in X. Bezeichnungen in diesem Fall: $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ oder $(a_n)_{n\geq k}$
Die Definitionen von Beschränktheit und Konvergenz, Satz 6 und die folgenden Sätze gelten ebenfalls für solche Folgen.

Def. 12 Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $A(n)$ eine Aussage definiert für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq k$.
$A(n)$ gilt *für fast alle* (f.f.a.) $n \geq k$ $:\Longleftrightarrow$

$$\exists \quad m \geq k \quad \forall \quad n \geq m: \qquad A(n) \text{ ist wahr}$$

d.h. $A(n)$ ist falsch für höchstens endlich viele n.

Satz 7 Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n - a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$
2. $b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $|a_n - a| \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.
3. Aus $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ folgt $|a_n| \xrightarrow{n\to\infty} |a|$
4. Es gelte $a_n \to a, b_n \to b$ $(n \to \infty)$. Dann gilt:
   (a) $a_n + b_n \xrightarrow{n\to\infty} a + b$
   (b) $\alpha a_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha a$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ fest
   (c) $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n\to\infty} a \cdot b$
   (d) Ist $b \neq 0$ so ex. $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für $n \geq m_0$ und es gilt

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=m}^{\infty} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a}{b}$$

(e) Ist $a_n \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a \leq b$

(f) Ist $a = b$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ so gilt $c_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.

Def. 13 Eine Folge (a_n) heißt *monoton wachsend* [*fallend*], falls für $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} \geq a_n$ $[a_{n+1} \leq a_n]$. (a_n) heißt *monoton*, falls die Folge monoton wachsend oder monoton fallend ist. Sie heißt *streng* monoton wachsend [fallend], falls für $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} > a_n$ $[a_{n+1} < a_n]$.

Satz 8 (Monotoniekriterium) Sei (a_n) monoton wachsend [fallend] und nach oben [unten] beschränkt. Dann ist (a_n) konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

7 Wichtige Beispiele

1. Für festes $p \in \mathbb{N}$ und eine konvergente Folge (a_n) mit $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$ gilt
$$\sqrt[p]{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[p]{a}$$

2. Sei $x \in \mathbb{R}$: Es sei
$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & x \neq 1 \end{cases}.$$
s_n konvergiert für $|x| < 1$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$

3. $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

4. Für $c > 0$ gilt $\sqrt[n]{c} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

5. Seien $(a_n), (b_n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ definiert durch
$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$(a_n), (b_n)$ sind konvergent und es gilt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: \mathrm{e}$$
e heißt EULER*sche Zahl*. Es ist e $\approx 2.718\ldots$

8 Teilfolgen und Häufungswerte

Def. 14 Sei (a_n) eine Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Abbildung. $b_n := a_{\varphi(n)}$ heißt *Teilfolge* von a_n.

Bsp. Sei (a_n) eine Folge.

- $\varphi(n) := 2n$, damit ist $(a_{\varphi(n)}) = (a_2, a_4, a_6, \ldots)$ Teilfolge von (a_n)

- $\varphi(n) := n^2$, damit ist $(a_{\varphi(n)}) = (a_1, a_4, a_9, \dots)$ Teilfolge von (a_n)
- $(a_1, a_2, a_1, a_3, a_1, a_4, \dots)$ ist *keine* Teilfolge von (a_n), denn $1 < 2$.

Def. 15 $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungswert* der Folge (a_n), falls für jedes $\varepsilon \geq 0$ gilt: $a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

Bsp.

- $a_n := (-1)^n$ hat die Häufungswerte -1 und 1
- Für eine Folge, die $\mathbb{Q}$ abzählt, gilt: Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert.
- $a_n := n$ hat gar keine Häufungswerte.

Satz 9 (a_n) sei eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

1. α ist Häufungswert von (a_n) $\Longleftrightarrow$ Es gibt eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $(a_{n_k}) \xrightarrow{k \to \infty} \alpha$
2. Ist (a_n) konvergent und (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n), so ist (a_{n_k}) konvergent und es gilt
$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{k \to \infty} a_{n_k}$$
3. Ist (a_n) konvergent, so hat (a_n) genau einen Häufungswert α, und es ist $\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n$.

Satz 10 (Satz von Bolzano-Weierstrass) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, dann gilt: Ist (a_n) beschränkt, so besitzt (a_n) mindestens einen Häufungswert.

9 Oberer und unterer Limes

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. $H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist Häufungswert von } (a_n)\}$

Satz 11 (a_n) sei eine beschränkte Folge. Dann gilt:

1. $H(a_n)$ ist beschränkt.
2. $\sup H(a_n), \inf H(a_n) \in H(a_n)$, d.h. es existieren Minimum und Maximum von $H(a_n)$.

Def. 16 Sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.

$$\limsup_{n \to \infty} a_n := \max H(a_n)$$

heißt *Limes superior* oder *oberer Limes* von (a_n).

$$\liminf_{n \to \infty} a_n := \min H(a_n)$$

heißt *Limes inferior* oder *unterer Limes* von (a_n).

Bsp.

- Sei $a_n := (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$
- Sei $a_n := (-1)^n \cdot (1+\frac{1}{n})^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e} \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = -\mathrm{e}$$
- Sei $a_n := \frac{1}{n}$. Dann gilt
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = 0$$

Satz 12 Sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\alpha = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \quad \Longleftrightarrow \quad$ Für alle $\varepsilon > 0$ gilt
   (a) $\alpha - \varepsilon < a_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$
   (b) $a_n < \alpha + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$
2. $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \quad \Longleftrightarrow \quad$ Für alle $\varepsilon > 0$ gilt
   (a) $\alpha - \varepsilon < a_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$
   (b) $a_n < \alpha + \varepsilon$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$

Satz 13 Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$
2. (a_n) hat genau einen Häufungswert
3. (a_n) ist konvergent.

Bem. (2) $\Longleftrightarrow$ (3) gilt nicht für unbeschränkte Folgen: Für (a_n) mit
$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ n & n \text{ ungerade} \end{cases}$$
gilt $H(a_n) = \{0\}$, aber (a_n) ist divergent.

Satz 14 Seien $(a_n), (b_n)$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

1. Aus $a_n \le b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ folgt
$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n$$
2. $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \ge \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$
4. Für $\alpha > 0$ gilt $\limsup\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$
5. $\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)$
6. $\liminf\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$

10 Das Cauchy-Kriterium

Def. 17 Eine reelle Folge (a_n) heißt Cauchy-*Folge* (CF), falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Bem. (a_n) ist Cauchy-Folge $\iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0\ \forall\, k \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$$

Es gilt: (a_n) ist konvergent $\iff$ (a_n) ist Cauchy-Folge. (Cauchy-*Kriterium*).

11 Unendliche Reihen

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$s_n := a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,.$$

Die Folge (s_n) heißt *unendliche Reihe* und wird mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. s_n heißt n-te Teilsumme der Reihe. Ist (s_n) konvergent, so heißt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ der *Reihenwert* oder die *Reihensumme* von (a_n)

Bsp.

- Für festes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. (*geometrische Reihe*)
- Es gilt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$
- Es gilt $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$
- Es gilt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent (*harmonische Reihe*)

Satz 15 Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

1. (Monotoniekriterium für Reihen) Ist $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ und (s_n) beschränkt, so konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
2. (Cauchy-Kriterium für Reihen)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv. } \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m > n_0 : \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Dann ist für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ auch $\sum\limits_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$ konvergent und für

$$r_\nu := \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$$

gilt $r_\nu \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$.

4. Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Bsp.

- Sei $a_n := (-1)^n \ (n \in \mathbb{N})$. (a_n) konvergiert nicht gegen 0, daher ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

divergent.

- Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 := 1$ und

$$a_{n+1} := \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$$

Beh: Es gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.
Bew:
Ann: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent. Sei $s := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. $s \neq 0$ wäre ein Widerspruch zur Annahme, also gilt $s = 0$. Wegen $a_n > 0 \ (n \in \mathbb{N})$ gilt $s_n > 0 \ (n \in \mathbb{N})$. Zu $\varepsilon := 1$ exisitert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 < s_n < 1 - \varepsilon \ (n \geq n_0)$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{s_n} > 1 \ (n \geq n_0) \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} > 1 \ (n \geq n_0) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Widerspruch! Also ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. ■

Satz 16 Seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Bem. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ kann konvergieren, obwohl $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergieren. Dies ist z.B. für $a_n := 1, b_n := -1 \ (n \in \mathbb{N})$ der Fall.

Def. 18 Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent.

Bsp. Die *alternierende* harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Satz 17 Ist eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und es gilt die *Dreiecksungleichung* für Reihen:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

12 Konvergenzkriterien für Reihen

Satz 18 (LEIBNITZ-Kriterium) Es sei (b_n) eine monoton fallende Nullfolge und $a_n := (-1)^n b_n$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz 19 Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt

1. (Majorantenkriterium): Gilt $|a_n| \leq b_n$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und zwar absolut.

2. (Minorantenkriterium): Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Bsp.

- Betrachte (a_n) mit $a_n := \frac{1}{(n+1)^2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt

  $$|a_n| = a_n = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} =: b_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

  Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium, daß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Durch Indexverschiebung erhält man, daß auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. (gegen $\frac{\pi^2}{6}$)

- Sei $\alpha \in (0,1]$, $\alpha \in \mathbb{Q}$. Es gilt

  $$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  Damit folgt aus dem Minorantenkriterium, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, daß auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ divergiert.

- Für $\mathbb{Q} \ni \alpha \geq 1$ gilt

$$0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Aus dem Majorantenkriterium folgt mit Beispiel 1, daß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert.

Bem. Ist später die allgemeine Potenz eingeführt, so zeigt man die obigen Beispiele auch für $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Satz 20 (Wurzelkriterium) Sei (a_n) Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt

1. Ist $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ unbeschränkt, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

2. Sei $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ beschränkt. Dann existiert ein α mit $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und es gilt

   (a) $\alpha < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

   (b) $\alpha > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

   Für $\alpha = 1$ ist keine Aussage möglich.

Bsp.

- Sei (a_n) definiert durch

$$a_n := (-1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}} < 1.$$

Damit folgt aus dem Wurzelkriterium, daß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

- Sei $x \in \mathbb{R}$ fest und (a_n) definiert durch

$$a_n := \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \text{ gerade} \\ n^2 x^2 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \text{ gerade} \\ \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot |x| & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \max\{\frac{1}{2}, |x|\}$$

Also gilt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Für $|x| = 1$ gilt $|a_n| = n^2|x|^n = n^2$ ($n \in \mathbb{N}$ ungerade) Also ist (a_{2n-1}) unbeschränkt, konvergiert also insbesondere nicht gegen 0, also ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Satz 21 (Quotientenkriterium) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$. (b_n) sei definiert durch

$$b_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad (n \in \mathbb{N})$$

Dann gilt:

1. Ist (b_n) beschränkt und gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n < 1$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

2. Ist $b_n \geq 1$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

3. Ist (b_n) beschränkt und gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n > 1$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Bem. Ist (a_n) eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ beschränkt, so gilt

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, dann liefert das Quotientenkriterium keine Entscheidung. Nach obiger Rechnung ist dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Also liefert in diesem Fall auch das Wurzelkriterium keine Entscheidung.

Bsp.

- Sei $x \in \mathbb{R}$ und (a_n) definiert durch $a_n := \frac{1}{n!}x^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Für $x = 0$ konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Sei nun $x \neq 0$. Es gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Damit gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren eine Funktion $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

E heißt *Exponentialfunktion*. Es gilt $E(0) = 1$ und $E(1) = \mathrm{e}$.

Satz 22 Es sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $(n_k) := (n_1, n_2, \dots)$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Weiter sei

$$\begin{aligned} b_1 &:= a_1 + \cdots + a_{n_1} \\ b_2 &:= a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2} \\ &\vdots \\ b_{k+1} &:= a_{n_k+1} + \cdots + a_{n_{k+1}} \quad (k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Dann gilt: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ist konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_k$$

13 Umordnung von Reihen

Def. 19 Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Weiter sei $b_n := a_{\varphi(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann heißt (b_n) *Umordnung* von (a_n) und es heißt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Umordnung der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bsp. Zur Folge $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ ist $(a_2, a_1, a_4, a_3, \dots)$ eine Umordnung.

Satz 23 (Umordnungssatz) (b_n) sei eine Umordnung der Folge (a_n). Dann gilt:

1. (a_n) konvergiert $\Longrightarrow$ (b_n) konvergiert und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert absolut und es gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Satz 24 (Riemannscher Umordnungssatz) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann gilt

1. Es existiert eine Umordnung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert.
2. Sei $s \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert eine Umordung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = s$ ist.

Def. 20 Es seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen. Wir betrachten die Produkte $a_j b_k$ für $j \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0$. Ist (p_n) eine Folge mit

$$\exists \quad \varphi : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \text{ bijektiv mit } \quad a_j b_k = p_{\varphi(j,k)} \quad (j, k \in \mathbb{N}_0),$$

so heißt diese Folge *Anordnung* der $a_j b_k$ und die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ heißt *Produktreihe* von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Satz 25 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergent und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ sei eine ihrer Produktreihen. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$$

Def. 21 Gegeben seien zwei Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. (p_n) sei die Anordnung aller $a_j b_k$ nach der Diagonalen. Faßt man die Produkte $a_j b_k$ jeder Diagonalen zusammen, so entsteht die Folge (c_n) mit

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0 \\
c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\
c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\
&\vdots \\
c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} b_k
\end{aligned}$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt CAUCHY-*Produkt* von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$

Satz 26 Sind zwei Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, so konvergiert ihr CAUCHY-Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Bsp. Betrachte die Funktion E von Seite 16 und $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
E(x) \cdot E(y) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) \overset{\text{S. 26}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)! \cdot n!} x^k y^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n \\
&= E(x+y)
\end{aligned}$$

Induktiv zeigt man:

$$\prod_{i=1}^{n} E(x_i) = E(\sum_{i=1}^{n} x_i) \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

14 Potenzreihen

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Eine Reihe der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt *Potenzreihe.*

Satz 27 Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe. Dann gilt

1. Ist $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ unbeschränkt, dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nur für $x = 0$.
2. Ist $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ beschränkt und $\varrho = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, so gilt
   (a) $\varrho = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $\varrho > 0 \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert für $|x| < \frac{1}{\varrho}$ und divergiert für $|x| > \frac{1}{\varrho}$. Für $|x| = \frac{1}{\varrho}$ ist keine Aussage möglich.

Def. 22 Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe und ϱ wie in Satz 27.

$$r := \begin{cases} 0 & \text{falls 27.1 eintritt} \\ \infty & \text{falls 27.2 gilt und } \varrho = 0 \\ \frac{1}{\varrho} & \text{falls 27.2 gilt und } \varrho > 0 \end{cases}$$

r heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Der *Konvergenzbereich* K mit

$$K := \{x \in \mathbb{R} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert}\}$$

hat stets die folgende Form:

1. $\{0\}$ falls $r = 0$
2. $\mathbb{R}$ falls $r = \infty$
3. $(-r, r)$ oder $(-r, r]$ oder $[-r, r)$ oder $[-r, r]$ falls $r \in (0, \infty)$

Bsp.

- Betrachte $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad r = 1$$

  und damit konvergiert die Potenzreihe für $|x| < 1$ absolut und sie divergiert für $|x| > 1$. Für $x = 1$ und $x = -1$ divergiert sie. Der Konvergenzbereich der Potenzreihe ist also $(-1, 1)$.

- Betrachte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad r = 1.$$

  Damit konvergiert die Potenzreihe für $|x| < 1$ absolut und sie divergiert für $|x| > 1$. Für $x = 1$ (harmonische Reihe, vgl. Seite 12) divergiert die Potenzreihe und für $x = -1$ (alternierende harmonische Reihe, vgl. Seite 14) konvergiert sie. Der Konvergenzbereich der Reihe ist also $[-1, 1)$.

- Betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$. Es gilt

$$\sqrt[n]{n^n} = n \qquad \Longrightarrow \qquad r = 0$$

  Also konvergiert die Potenzreihe nur für $x = 0$.

- Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist hier $r = \infty$

Def. 23 Die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Kosinus) und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Sinus) seien definiert durch

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Satz 28 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ seien Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0, r_2 > 0$. Sei $R := \min\{r_1, r_2\}$ (mit $R := \infty$, falls $r_1 = \infty$ und $r_2 = \infty$). Weiter sei

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Dann gilt: Der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ist mindestens R und für $|x| < R$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right)$$

Satz 29 Für die Exponentialfunktion $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ gilt:

1. $\forall \quad x, y \in \mathbb{R} : \qquad E(x) \cdot E(y) = E(x + y)$
2. $E(0) = 1, \quad E(1) = \mathrm{e}$
3. $\forall \quad x \in \mathbb{R} : \qquad E(-x) = \frac{1}{E(x)}$ sowie $E(x) > 0$
4. $\forall \quad r \in \mathbb{Q} : \qquad E(r) = \mathrm{e}^r$
5. E ist streng monoton wachsend, d.h. $x < y \Longrightarrow E(x) < E(y)$

15 g-adische Entwicklung

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq a < k+1$. $[a] := k$. In diesem Kapitel sei $a \geq 0, g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Setze

$$\begin{aligned}
z_0 &:= [a] \\
z_1 &:= [(a - z_0) \cdot g] \\
&\vdots \\
z_{n+1} &:= \left[\left(a - z_0 - \frac{z_1}{g} - \dots - \frac{z_n}{g^n}\right) g^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

Dadurch wird eine Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ mit folgenden Eigenschaften definiert:

$$\begin{aligned}
& z_0 + \frac{z_1}{g} + \dots + \frac{z_n}{g^n} \leq a < z_0 + \frac{z_1}{g} + \dots + \frac{z_n}{g^n} + \frac{1}{g^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0) \\
& \forall \quad n \in \mathbb{N}_0 : \qquad z_n \in \mathbb{N}_0 \\
& \forall \quad n \in \mathbb{N}_0 : \qquad z_n \leq g - 1
\end{aligned}$$

Die Folge (z_n) heißt *g-adische Entwicklung von a.*

Satz 30 Ist $(\tilde{z}_n)_{n=0}^{\infty}$ eine weitere Folge mit den obigen Eigenschaften, so gilt $z_n = \tilde{z}_n \ (n \in \mathbb{N}_0)$.

Bsp. Es sei $g = 10$

- $a := 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1, \\
z_1 &= [(a - z_0) \cdot 10] = 0, \dots
\end{aligned}$$

  Es gilt $z_n = 0 \ (n \geq 1)$.
  Also ist $1 = 1,00000\dots$.

- $a := \frac{1}{2}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
z_0 &= 0, \\
z_1 &= \left[\left(\frac{1}{2} - 0\right) \cdot 10\right] = [5] = 5, \\
z_2 &= \left[\left(\frac{1}{2} - 0 - \frac{5}{10}\right) \cdot 100\right] = 0, \dots
\end{aligned}$$

  Es gilt $z_n = 0 \ (n \geq 2)$.
  Also ist $\frac{1}{2} = 0,5000\dots$.

- $a := \frac{1}{3}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
z_0 &= 0, \\
z_1 &= \left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) \cdot 10\right] = \left[\frac{10}{3}\right] = 3, \\
z_2 &= \left[\left(\frac{1}{3} - 0 - \frac{3}{10}\right) \cdot 100\right] = \left[\frac{10}{3}\right] = 3, \dots
\end{aligned}$$

Es gilt $z_n = 3$ $(n \geq 1)$.
Also ist $\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$.

Bem.

- Ist $b < 0$, so setze $a := -b$. Ist $a = z_0, z_1z_2z_3\ldots$ die g-adische Entwicklung von a so se die g-adische Entwicklung von b defniniert als $-z_0, z_1z_2z_3\ldots$.
- Ist $a \geq 0$, so kann man zeigen: Es gibt genau eine Folge $(\tilde{z}_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $\tilde{z}_n \in \mathbb{N}_0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, $\tilde{z}_n \leq g-1$ $(n \in \mathbb{N})$. und

$$\tilde{z}_0 + \frac{\tilde{z}_1}{g} + \cdots + \frac{\tilde{z}_n}{g^n} < a \leq \tilde{z}_0 + \frac{\tilde{z}_1}{g} + \cdots + \frac{\tilde{z}_n}{g^n} + \frac{1}{g^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

  Diese Möglichkeit liefert z.B. $1 = 0,99999\ldots$ oder $0,5 = 0,499999\ldots$ $(g = 10)$.

Satz 31 Sei $a = z_0, z_1z_2z_3\ldots$ die g-adische Entwicklung von a. Dann ist die Aussage:

$$z_n = g - 1 \quad \text{f.f.a. } n \in \mathbb{N}$$

falsch.

Satz 32 $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

16 Grenzwerte bei Funktionen

Def. 24 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 heißt *Häufungspunkt* von D, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$D \cap (U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$$

Bsp.

- $D := (0,1]$. Dann gilt x_0 ist Häufungspunkt $\Longleftrightarrow x_0 \in [0,1]$.
- $D := \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $x_0 = 0$ der einzige Häufungspunkt von D.
- Ist D endlich, so hat D keine Häufungspunkte.

Ab jetzt sei in diesem Paragraphen stets $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D.

Def. 25 Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$.

$$a = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \in D)}} f(x) \quad \text{oder} \quad f(x) \longrightarrow a \ (x \to x_0) \quad \text{oder} \quad f(x) \xrightarrow{x \to x_0} a$$

ist definiert als: Für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} a$.

Bem. Falls $x_0 \in D$, so ist der Funktionswert $f(x_0)$ in obiger Definition nicht relevant für die Existenz und Größe des Grenzwertes.

Bsp.

- Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x) := \begin{cases} x^2 & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & x = \frac{1}{2} \\ 1 & x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{1}{7} & x = 1 \end{cases}$$
Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ existiert nicht, aber
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+} f(x) := \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ (x\in(\frac{1}{2},1))}} f(x) = 1$$
und
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-} f(x) := \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ (x\in(0,\frac{1}{2}))}} f(x) = \frac{1}{4}$$

- Sei $D = [0,\infty)$, $p \in \mathbb{N}$, $f(x) := \sqrt[p]{x}$. Sei $x_0 \in D$. Ist (x_n) Folge in D mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, so gilt $\sqrt[p]{x_n} \to \sqrt[p]{x_0}$. Damit gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Satz 33 Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \iff$
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\, x \in D \setminus \{x_0\} : \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Satz 34 Sei $f : D \to \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ gilt, daß $(f(x_n))$ konvergiert.

Satz 35 Seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und die Grenzwerte
$$a := \lim_{x\to x_0} f(x), \qquad b := \lim_{x\to x_0} g(x)$$
seien vorhanden. Dann gilt:

1. $f(x) + g(x) \xrightarrow{x\to x_0} a + b$
2. $f(x) - g(x) \xrightarrow{x\to x_0} a - b$
3. $|f(x)| \xrightarrow{x\to x_0} |a|$
4. Gibt es ein $\delta > 0$ mit $f \le g$ auf $(D \cap U_\delta(x_0)) \setminus \{x_0\}$, so gilt $a \le b$
5. Gibt es ein $\delta > 0$ mit $f \le h \le g$ auf $(D \cap U_\delta(x_0)) \setminus \{x_0\}$ und ist $a = b$, so gilt $h(x) \xrightarrow{x\to x_0} a$.
6. Ist $b \neq 0$, so gilt
$$\exists \quad \delta > 0 \quad \forall \quad x \in (D \cap U_\delta(x_0)) \setminus \{x_0\} : \qquad |g(x)| > \frac{|b|}{2}$$
und für die Funktion
$$\frac{f}{g} : (D \cap U_\delta(x_0)) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$$
gilt:
$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x\to x_0} \frac{a}{b}$$

Def. 26

1. Sei (x_n) Folge in $\mathbb{R}$. $x_n \to \infty[-\infty] :\Longleftrightarrow$
$$\forall \quad c \in \mathbb{R} \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \quad n \geq n_0 : \qquad x_n > c \quad [x_n < c]$$
2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \ [-\infty] :\Longleftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} \infty \ [-\infty]$
3. $D \subseteq \mathbb{R}$ sei nicht nach oben [unten] beschränkt, $f : D \to \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ $[\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a] :\Longleftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty \ [-\infty]$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} a$. Dabei seien $a = \pm\infty$ zugelassen.

Bsp.

- $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \to 0+} \infty$, $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \to 0-} -\infty$
- $E(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$. Sei $p \in \mathbb{N}$ fest. Für $x > 0$ gilt
$$E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots > \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}$$
  Damit gilt $\frac{E(x)}{x^p} > \frac{x}{(p+1)!}$ $(x > 0)$ Damit gilt
$$\frac{E(x)}{x^p} \xrightarrow{x \to \infty} \infty$$
  Für das spezielle $p = 0$ folgt $\lim\limits_{x \to \infty} E(x) = \infty$ und wegen $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$ gilt auch $\lim\limits_{x \to -\infty} E(x) = 0$.

17 Stetigkeit

Def. 27 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig* in $x_0 \in D$, falls für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \xrightarrow{x \to \infty} x_0$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(x_0)$. f heißt *stetig auf* $A \subseteq D$, wenn f in allen $x \in A$ stetig ist. $C(D) := \{f : D \to \mathbb{R} : \ f \text{ ist stetig auf } D\}$.

Bsp.

- Sei $D : [0,1] \cup \{2\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x) := \begin{cases} x^2 & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$
  f ist in jedem Punkt $x \in [0,1)$ stetig und in $x = 1$ unstetig. Betrachte $x = 2$: Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \xrightarrow{n \to \infty} 2$. Dann gilt $x_n = 2$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $f(x_n) = 1$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} 1 = f(2)$. Also ist f stetig in $x = 2$.
- Für $f(x) := \sqrt[p]{x}$ $(x \in [0,\infty))$ gilt $f \in C([0,\infty))$.

Satz 36 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Es gilt:

1. f ist stetig in $x_0 \iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D : \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

2. Ist x_0 Häufungspunkt von D, so gilt:

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \quad \iff \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Satz 37

1. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$ stetig in x_0. Ist $x_0 \in \tilde{D} := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$, so ist $\frac{f}{g} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

2. $C(D)$ ist ein reeller Vektorraum.

Satz 38 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$, $g : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$ und g sei stetig in $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

Satz 39 Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D := (-r, r)$ ($D := \mathbb{R}$, falls $r = \infty$), $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist stetig auf D.

Bsp.

- $E(x), \sin x, \cos x$ sind stetig für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ und $\lim\limits_{x \to 0} \frac{E(x) - 1}{x} = 1$.

18 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 40 (Zwischenwertsatz) Sei $f \in C([a, b])$ und y_0 liege zwischen $f(a)$ und $f(b)$, d.h. $\min\{f(a), f(b)\} \leq y_0 \leq \max\{f(a), f(b)\}$. Dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Satz 41 (Nullstellensatz von Bolzano) Sei $f \in C([a, b])$ und $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.

Def. 28

1. $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossen* $:\iff$ Für jede konvergente Folge (x_n) in D gilt $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \in D$.

2. $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen* $:\iff \mathbb{R} \setminus D$ ist abgeschlossen.

Bsp. Sei $a < b$. Dann ist $[a, b]$ abgeschlossen und nicht offen, (a, b) ist offen und nicht abgeschlossen. $\mathbb{R}, \emptyset$ sind offen und abgeschlossen und $[1, 2] \cup \{3\}$ ist abgeschlossen, aber nicht offen.

Def. 29 $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*:$\Longleftrightarrow$ $f(D)$ ist beschränkt.

Satz 42 $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ sei abgeschlossen und beschränkt. Weiter sei $f \in C(D)$. Dann gilt:

$$\exists \quad x_1, x_2 \in D \quad \forall \quad x \in D : \qquad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

D.h: f ist beschränkt und $f(D)$ besitzt Minimum und Maximum.

Bsp.

- Sei $D := [0, 1]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \\ 5 & x = 0 \end{cases}$$
f ist unbeschränkt.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ ist unbeschränkt
- Sei $D := (0, 1)$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist f unbeschränkt.

Satz 43 Sei I ein Intervall und $f \in C(I)$. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.

Satz 44 Sei I ein Intervall und $f \in C(I)$ streng monoton. Dann ist f^{-1} stetig auf $f(I)$.

Def. 30 Die Funktion $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ (*Logarithmus*) ist definiert als $E^{-1}(x)$

Def. 31 Für $a > 0, x \in \mathbb{R}$ sei $a^x := E(x \log a)$.

Bem. Seien $a > 0, x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- $x \to a^x$ ist stetig
- $a^x > 0$
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $\log a^x = x \log a$

Für $x \in \mathbb{Q}$ stimmt diese Definition von a^x mit der bisherigen überein.

19 Funktionenfolgen und -reihen

In diesem Kapitel sei stets $D \subseteq \mathbb{R}$, (f_n) eine Folge von Funktionen $D \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $s_n = f_1 + \cdots + f_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

bezeichnet man als *Funktionenreihe*

Def. 32 Die Funktionenfolge (f_n) (bzw. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$) konvergiert *punktweise* auf D, falls $(f_n(x))$ (bzw. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$) für jedes $x \in D$ konvergiert. In diesem Fall heißen $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (bzw. $s : D \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$) die *Grenzfunktion* (bzw. *Summenfunktion*) von (f_n) (bzw. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$)

Bsp.

- Sei $D := [0,1]$ und $f_n(x) := x^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt
$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{array} \right\} =: f(x)$$
d.h. (f_n) konvergiert punktweise auf D gegen f. Beachte $f_n \in C([0,1])$, aber $f \notin C([0,1])$.

- Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius r. Es sei $D := (-r,r)$, $f_n : D \to \mathbb{R}, f_n(x) = a_n x^n$. Die Potenzreihe konvergiert punktweise auf D gegen
$$s : D \to \mathbb{R}, \quad s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Def. 33 (f_n) (bzw. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$) konvergiert auf D *gleichmäßig*, falls es eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ (bzw. $s : D \to \mathbb{R}$) gibt mit

$$\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \quad n \geq n_0 \quad \forall \quad x \in D : \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$(\text{bzw. } \forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \quad n \geq n_0 \quad \forall \quad x \in D : \qquad |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon)$$

Bsp.

- Sei $D := [0,1]$, $f_n(x) := x^n$ $(n \in N)$ und $f : D \to \mathbb{R}$ die Grenzfunktion. Es gilt
$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - \underbrace{f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)}_{=0} \right| = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n = \frac{1}{2}$$
Also konvergiert (f_n) auf D nicht gleichmäßig gegen f.

- Sei $0 < \alpha < 1$, $D = [0,\alpha]$, $f_n(x) = x^n$, $f = 0$. (f_n) konvergiert gleichmäßig auf D gegen f.

- Sei $D := [0,\infty), f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $f = 0$. Es gilt
$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
Also konvergiert (f_n) auf D nicht gleichmäßig.

Satz 45 (f_n) sei eine Funktionenfolge und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Existiert eine Nullfolge (α_n) und ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall \quad n \geq m \quad \forall \quad x \in D: \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$$

so konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.

Satz 46 (Majorantenkriterium von WEIERSTRASS) Existiert eine Folge (c_n) und ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall \quad n \geq m \quad \forall \quad x \in D: \qquad |f_n(x)| \leq c_n$$

und ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf D.

Satz 47 Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Weiter sei $D := (-r, r)$ und $[a, b] \subseteq D$. Dann konvergiert die Potenzreihe auf $[a, b]$ gleichmäßig.

Satz 48 (f_n) (bzw. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$) konvergiere gleichmäßig auf D gegen $f: D \to \mathbb{R}$ (bzw. $s: D \to \mathbb{R}$).

1. Sei $x_0 \in D$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \text{ ist stetig in } x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ (bzw. } s\text{) ist stetig in } x_0$$

2. Es gilt:

$$\forall \quad n \in \mathbb{N}: \qquad f_n \in C(D) \quad \Longrightarrow \quad f \in C(D) \text{ (bzw. } s \in C(D))$$

Bem.

- (f_n) konvergiere punktweise auf D gegen $f: D \to \mathbb{R}$. Gilt $f_n \in C(D)$ $(n \in \mathbb{N})$ aber $f \notin C(D)$, so folgt (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig.
- $(f_n), f, D$ seien wie in Satz 48, alle f_n seien in $x_0 \in D$ stetig und x_0 sei Häufungspunkt von D. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right).$$

Satz 49 (Identitätssatz für Potenzreihen) Seien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0, r_2 > 0$ und $R := \min\{r_1, r_2\}$. $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ sei eine Folge in $(-R, R) \setminus \{0\}$ mit $x_k \xrightarrow{n \to \infty} 0$ und $f(x_k) = g(x_k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Dann gilt $a_n = b_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

20 Gleichmäßige Stetigkeit

In diesem Kapitel seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Es gilt $f \in C(D) \iff$

$$\forall\, y \in D\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D : \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Def. 34 $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D *gleichmäßig stetig*, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x, y \in D : \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Ist f gleichmäßig stetig auf D, so ist f auch stetig auf D.

Satz 50 Ist D beschränkt und abgeschlossen und $f \in C(D)$. Dann ist f gleichmäßig stetig auf D.

Bsp. Sei $D = [0, 1]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Es gilt

$$|f(x) - f(y)| = |x - y||x + y| \leq (|x| + |y|)|x - y| \leq 2|x - y|$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für $x, y \in D$:

$$|x - y| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| \leq 2|x - y| < 2\delta = \varepsilon.$$

Also ist f gleichmäßig stetig auf D.

Def. 35 $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D LIPSCHITZ-*stetig* $:\iff$

$$\exists \quad L > 0 \quad \forall \quad x, y \in D : \qquad |f(x) - f(y)| < L|x - y|$$

Ist f LIPSCHITZ-stetig, so ist f gleichmäßig stetig. L heißt LIPSCHITZ-*Konstante*.

21 Differenzierbarkeit

In diesem Kapitel sei I stets ein Intervall.

Def. 36 $f : I \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in I$ *differenzierbar* $:\iff$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert und liegt in $\mathbb{R}$. Ist f differenzierbar in x_0, so heißt

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

die (erste) *Ableitung* von f in x_0. Ist f in jedem $x \in I$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf I. In diesem Fall wird durch $x \to f'(x)$ eine Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ definiert. Diese Funktion heißt *erste Ableitung* von f.

Bsp.

- Sei I beliebig und $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$ fest). Dann gilt: f ist differenzierbar auf I und $f'(x) = 0$ ($x \in I$).

- Sei $I = \mathbb{R}$ und $f(x) = |x|$, $x_0 := 0$. Es gilt
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$
Also ist f in x_0 nicht differenzierbar (aber stetig!).

Satz 51 $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann ist f stetig in x_0.

Bsp.

- $I = \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$ ($n \in \mathbb{N}$ fest). Dann gilt
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-1} \xrightarrow{x \to x_0} n x_0^{n-1}$$
Also ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = nx^{n-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).
- $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x$ ($x \in \mathbb{R}$). Es gilt
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow{h \to 0} f(x_0) = \mathrm{e}^{x_0}.$$
Also ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \mathrm{e}^x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Satz 52 Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann gilt:

1. Für $\alpha, \beta \in R$ ist $\alpha f + \beta g$ differenzierbar in x_0 und es gilt
$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$
2. (Produktregel) $f \cdot g$ ist differenzierbar in x_0 und es gilt
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$
3. (Quotientenregel) Ist $g(x_0) \neq 0$, so existiert ein Intervall $J \subseteq I$, so daß $x_0 \in J$ und $g(x) \neq 0$ ($x \in J$). Weiter ist $\frac{f}{g} : J \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Satz 53 (Kettenregel) I, J seien Intervalle. $g : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $x_0 \in I$, $g(I) \subseteq J$. $f : J \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $g(x_0) =: y_0$. Dann ist $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und es gilt
$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) g'(x_0)$$

Bsp. Sei $I = \mathbb{R}$, $h(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \log a}$ ($a > 0$ fest). Wähle $g(x) := x \log a$ und $f(x) = \mathrm{e}^x$. Dann ist $h = f \circ g$. Dann folgt aus der Kettenregel:
$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \mathrm{e}^{x \log a} \cdot \log a = \log a \cdot a^x.$$

Satz 54 I sei ein Intervall, $f \in C(I)$ sei streng monoton und differenzierbar in $x_0 \in I$. Weiter sei $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und es gilt
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Bsp.

- Sei $f(x) := \mathrm{e}^x$, $f^{-1}(y) = \log y$. Dann ist
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{y}$$
Damit gilt $(\log x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$.

- Sei $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ fest). Dann ist $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha \log x}$. Aus
$$f'(x) = \mathrm{e}^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$
folgt damit (für $\alpha = \frac{1}{2}$): $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Def. 37 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. $x_0 \in M$ heißt *innerer Punkt* von M, falls gilt
$$\exists \quad \delta > 0 : \qquad U_\delta(x_0) \subseteq M.$$

Def. 38 $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ habe in x_0 ein (relatives) *Maximum* [*Minimum*], wenn gilt
$$\exists \quad \delta > 0 \quad \forall \quad x \in D \cap U_\delta(x_0) : \qquad f(x) \leq f(x_0) \quad [f(x) \geq f(x_0)]$$
f hat in x_0 ein (relatives) *Extremum*, wenn f in x_0 ein relatives Maximum oder ein relatives Minimum hat.

Satz 55 $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in x_0 und habe in x_0 ein relatives Extremum. Ist x_0 ein innerer Punkt von I, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Satz 56 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Sei $f \in C([a,b])$ differenzierbar auf (a,b). Dann gilt:
$$\exists \quad \xi \in (a,b) : \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Satz 57 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

1. Satz von Rolle: $f \in C([a,b])$ sei differenzierbar auf (a,b) und $f(a) = f(b)$ $\Longrightarrow \exists\, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$

2. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ sind differenzierbare Funktionen auf I. Dann gilt:

   (a)
   $$\begin{array}{lcl} f'(x) = 0 \ (x \in I) & \Longleftrightarrow & f \text{ ist konstant auf } I \\ f'(x) > 0 \ (x \in I) & \Longleftrightarrow & f \text{ ist streng monoton steigend auf } I \\ f'(x) < 0 \ (x \in I) & \Longleftrightarrow & f \text{ ist streng monoton fallend auf } I \\ f'(x) \geq 0 \ (x \in I) & \Longleftrightarrow & f \text{ ist monoton steigend auf } I \\ f'(x) \leq 0 \ (x \in I) & \Longleftrightarrow & f \text{ ist monoton fallend auf } I \end{array}$$

   (b) $f'(x) = g'(x) \ (x \in I) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, c \in \mathbb{R} : \ f = g + c$ auf I.

Satz 58 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) $f, g \in C([a,b])$ seien differenzierbar auf (a,b) und $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a,b))$. Dann gilt $g(b) \neq g(a)$ und
$$\exists \quad \xi \in (a,b) : \qquad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

22 Die Regel von de l'Hôspital

Satz 59 $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf (a, b) ($a = -\infty$ oder $b = \infty$ zugelassen). Es sei $g'(x) \neq 0$ ($x \in (a, b)$). Gilt

1. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ [x\to b]}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ [x\to b]}} g(x) = 0$ oder

2. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ [x\to b]}} g(x) = \pm\infty$

und existiert

$$L := \lim_{\substack{x\to a\\ [x\to b]}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (L = \pm\infty \text{ zugelassen})$$

Dann gilt

$$\lim_{\substack{x\to a\\ [x\to b]}} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Bsp.

- Seien $a, b > 0$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

- $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\log x}{x}} \overset{(2)}{=} 1$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{2} = \frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\mathrm{e}^x}$ In diesem Fall sind die Voraussetzungen des Satzes nicht erfüllt.

23 Ableitungen höherer Ordnung

Satz 60 Es sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ und $I := (-r, r)$. Dann gilt:

1. Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ hat ebenfalls den Konvergenzradius r.

2. $f : I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar auf I und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad (x \in I)$$

Satz 61 Für die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt ($x, y \in \mathbb{R}$):

1. $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$
2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
3. $|\sin x| \leq |x|$
4. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
5. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
6. $\exists\, \pi \in (0,4): \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0$ (Definition von π)
7. $\pi \approx 3.1415926\ldots$
8. $\sin x = -\sin(-x)$, $\cos x = \cos(-x)$
9. $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = -\cos x$, $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin x$
10. $\sin(x+\pi) = -\sin x$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$
11. $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$
12. $\sin x = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$, $\cos x = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

24 Nochmals Potenzreihen

Def. 39 Allgemeiner als bisher heißt eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (x_0 \in \mathbb{R} \text{ fest})$$

ebenfalls *Potenzreihe* (mit *Entwicklungspunkt* x_0).

Def. 40 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_1 \in I$. f wird in einer Umgebung von x_1 *durch eine Potenzreihe dargestellt*, wenn ein $\delta > 0$ gibt, für das eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_1)^n$ mit Konvergenzradius $r > 0$ gibt mit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_1)^n \qquad (x \in I \cap U_\delta(x_1))$$

Bsp.

- Sei $I = (-\infty, 1)$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Es gilt

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (|x| < 1)$$

  Also wird f in einer Umgebung von $x_1 = 0$ durch eine Potenzreihe dargestellt ($\delta = 1$). Sei $x_1 \in (-\infty, 1)$. Es gilt

  $$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x_1)-(x-x_1)} = \frac{(1-x_1)^{-1}}{1-\frac{x-x_1}{1-x_1}}$$

Daraus folgt

$$\left|\frac{x-x_1}{1-x_1}\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x-x_1| < |1-x_1|$$

und damit $x < 1$. Für $|x-x_1| < |1-x_1| =: \delta$ gilt somit:

$$f(x) = (1-x_1)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-x_1}{1-x_1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_1)^n}{(1-x_1)^{n+1}}$$

Also wird f in einer Umgebung von x_1 durch eine Potenzreihe dargestellt.

- Sei nun $I = (-1, \infty)$, $f(x) = \log(1+x)$. $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $(x > -1)$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \qquad (|x| < 1)$$

Setze $g(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$ auf I. Dann gilt

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = f'(x) \quad (|x| < 1).$$

Daraus folgt:

$$\exists \quad c \in \mathbb{R} \quad \forall \quad x \in (-1,1): \qquad f = g + c$$

Aus $f(0) = 0 = g(0)$ folgt $c = 0$. Also gilt $f = g$ auf $(-1, 1)$.

Satz 62 Sei $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ und $x_1 \in I$. Für $\delta := r - |x_1 - x_0|$ ($\delta = \infty$, falls $r = \infty$), $J := (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ ($J = \mathbb{R}$, falls $r = \infty$) gibt es eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_1)^n$ mit Konvergenzradius $r_b \geq \delta$ und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_1)^n \qquad (x \in J)$$

25 Höhere Ableitungen

Def. 41 $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf I. f heißt in $x_0 \in I$ *zweimal differenzierbar*, falls gilt: f' ist in x_0 differenzierbar. In diesem Fall heißt $f''(x_0) := (f')'(x_0)$ die *zweite Ableitung* von f in x_0. Ist f in jedem $x \in I$ zweimal differenzierbar, so heißt f *zweimal differenzierbar* auf I und $f'' := (f')'$ heißt die *zweite Ableitung* von f auf I.

Analog wird definiert: $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \ldots$ sowie $f''', f^{(4)}, \ldots$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. f heißt auf I n-mal stetig differenzierbar, falls gilt: $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ existieren auf I und sind dort stetig. (Dies ist eine Bedingung an die n-te Ableitung). Bezeichnung in diesem Fall: $f \in C^n(I)$. $C^\infty(I) := \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} C^n(I)$.

Bsp.

- $(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$ $(x \in \mathbb{R})$. Außerdem gilt $(\cos x)''' = \sin x$ und damit auch $(\cos x)^{(4)} = \cos x$. Damit gilt $\cos \in C^\infty(\mathbb{R})$. Gleiches gilt für sin.
- $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$ $(n \in \mathbb{N})$.
- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

  $$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

  Für $x > 0$ gilt $f'(x) = 2x$, für $x < 0$ gilt $f'(x) = -2x$.

  $$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

  Damit gilt $f'(x) = 2|x|$ $(x \in \mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R})$. f' ist in $x = 0$ nicht differenzierbar, deshalb ist f dort nicht zweimal differenzierbar.

Satz 63 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion, x_0 sei innerer Punkt von I. Weiter gelte: f läßt sich in einer Umgebung von x_0 als Potenzreihe darstellen, d.h. es gibt ein $\delta > 0$, für das es eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ mit Konvergenzradius $r \geq \delta$ gibt, für die

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad (x \in U_\delta(x_0) \subseteq I)$$

gilt. Dann ist $f \in C^\infty(U_\delta(x_0))$ und es gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Def. 42 Sei $\varepsilon > 0$ und $f \in C^\infty(U_\varepsilon(x_0))$. Dann heißt die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

die zu f und x_0 gehörende Taylor-*Reihe*.

Satz 64 (Satz von Taylor) $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^n(I)$ und $f^{(n+1)}$ existiere auf I. Sind $a, b \in I$, $a \neq b$, dann gilt: Es existiert ein $\xi \in (\min\{a, b\}, \max\{a, b\})$ mit

$$f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k}_{=:T_n(x, x_0)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (b - a)^{n+1}}_{=:R_n(x, x_0)}$$

Def. 43 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C^n(I)$, $n \geq 0$, $x_0 \in I$. Dann heißt $T_n(x, x_0)$ aus obigem Satz *n-tes* Taylor-*Polynom* von f in x_0.

Satz 65 Sei $I = (a, b)$, ($a < b, a = -\infty, b = \infty$ zugelassen), $f \in C^\infty(I)$, $x_0 \in I$. Weiter existiere ein $c > 0$ mit

$$\forall \quad x \in I \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}_0 : \qquad \left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \le c^n$$

Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad (x \in I \cap (x_0 - \frac{1}{c}, x_0 + \frac{1}{c}))$$

26 Extremwerte

Satz 66 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \ge 2$, $f \in C^n(I)$, x_0 sei innerer Punkt von I und es gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \ne 0$$

Dann gilt:

1. Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum
2. Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$ [$f^{(n)}(x_0) > 0$], so hat f in x_0 ein lokales Maximum [Minimum].

27 Das Riemann-Integral

In diesem Kapitel sei stets $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $m := \inf f([a, b])$, $M := \sup f([a, b])$

Def. 44 $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ heißt *Zerlegung* von $[a, b]$, wenn gilt

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \qquad (n \ge 1).$$

Für $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$ heißt $|I_j| := x_j - x_{j-1}$ die *Länge* von I_j. Weiter sei $m_j := \inf f(I_j)$, $M_j := \sup f(I_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$.

$$\underline{s}_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j|$$

heißt *Untersumme* für f und Z.

$$\overline{s}_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j|$$

heißt *Obersumme* für f und Z.

Satz 67 Z_1, Z_2 seien Zerlegungen von $[a, b]$. Dann gilt:

1. Aus $Z_1 \subseteq Z_2$ folgt $\underline{s}_f(Z_1) \le \underline{s}_f(Z_2)$ und $\overline{s}_f(Z_1) \ge \overline{s}_f(Z_2)$

2. $\underline{s}_f(Z_1) \le \overline{s}_f(Z_2)$

Def. 45

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{\underline{s}_f(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

heißt *unteres* (Riemann-) *Integral*,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{\overline{s}_f(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

heißt *oberes* (Riemann-)*Integral*.

Def. 46 f heißt (Riemann-)*integrierbar* über $[a,b]$, falls gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

das (Riemann-)*Integral* von f über $[a,b]$. $R([a,b])$ sei die Menge aller über $[a,b]$ integierbaren Funktionen.

Bsp.

- Sei $f(x) = c$ $(x \in [a,b])$ und $Z = \{x_0,\ldots,x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann gilt $m_j = M_j = c$ $(j = 1,\ldots,n)$. Also gilt auch

  $$\underline{s}_f(Z) = \overline{s}_f(Z) = c \cdot (b-a)$$

  Somit ist f über $[a,b]$ integierbar und es gilt

  $$\int_a^b f(x)dx = c \cdot (b-a)$$

- Sei $[a,b] = [0,1]$, $f(x) = x$. $Z = \{x_0,\ldots,x_n\}$ sei eine äquidistante Zerlegung von $[0,1]$, also $x_j = \frac{j}{n}$ $(j = 0,\ldots,n)$, $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt

  $$|I_j| = \frac{1}{n}, \quad m_j = f(x_{j-1}) = \frac{j-1}{n}, \quad M_j = f(x_j) = \frac{j}{n} \qquad (j = 1,\ldots,n).$$

  Damit gilt:

  $$\underline{s}_f(Z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(j-1) = \frac{1}{n^2}(n-1)\frac{n}{2} = \frac{n-1}{2n} =: \alpha_n$$

und analog

$$\overline{s}_f(Z) = \frac{n-1}{2n} =: \beta_n$$

Insgesamt folgt daraus:

$$\begin{array}{ccc}
\alpha_n & \leq \underline{\int_0^1} x\,dx \leq \overline{\int_0^1} x\,dx \leq & \beta_n \\
\downarrow & & \downarrow \quad (n \to \infty) \\
\frac{1}{2} & & \frac{1}{2}
\end{array}$$

Also gilt $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ und $f \in R([0,1])$.

- Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ Zerlegung von $[0,1]$. Es gilt

$$m_j = \inf f(I_j) = 0 \quad M_j = \sup f(I_j) = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

denn $f(I_j) = \{0,1\}$. Damit gilt $\overline{s}_f(Z) = 1$ und $\underline{s}_f(Z) = 0$.

$$\Longrightarrow \qquad \underline{\int_0^1} f(x)dx = 0 < 1 = \overline{\int_0^1} f(x)dx$$

Damit ist $f \notin R([0,1])$.

Satz 68 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien beschränkt.

1. Sei $f \leq g$ auf $[a,b]$. Dann gilt:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} g(x)dx, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)dx \geq \underline{\int_a^b} g(x)dx$$

2. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ gilt:

$$\underline{\int_a^b} \alpha f(x)dx = \alpha \underline{\int_a^b} f(x)dx, \qquad \overline{\int_a^b} \alpha f(x)dx = \alpha \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

$$\underline{\int_a^b} -f(x)dx = -\overline{\int_a^b} f(x)dx, \qquad \overline{\int_a^b} -f(x)dx = -\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

3. Es gilt

$$\underline{\int_a^b}(f(x)+g(x))dx \quad \geq \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx,$$
$$\overline{\int_a^b}(f(x)+g(x))dx \quad \leq \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_a^b} g(x)dx$$

4. $R([a,b])$ ist ein reeller Vektorraum und die Abbildung $\Phi : R([a,b]) \to \mathbb{R}$, $\Phi(f) = \int_a^b f(x)dx$ ist linear

Satz 69 (Riemann-sches Integrabilitätskriterium)

$$f \in R([a,b]) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \text{ Zerl. } Z \text{ von } [a,b]: \quad \overline{s}_f(Z) - \underline{s}_f(Z) < \varepsilon$$

Satz 70 Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist $f \in R([a,b])$

Def. 47 $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $G, g : I \to \mathbb{R}$ seien Funktionen. G heißt *Stammfunktion* von g auf I, wenn G auf I differenzierbar ist und dort gilt $G' = g$.

Bem. Seien G, H Stammfunktionen von g auf I, so gilt

$$\exists \quad c \in \mathbb{R}: \qquad G = H + c$$

Satz 71 (erster Hauptsatz) Es seien $f \in R([a,b])$ und $F \in C([a,b])$ eine Stammfunktion zu f auf (a,b). Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b) =: F(x)\big|_a^b =: [F(x)]_a^b$$

Bsp.

- Sei $0 < a < b$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = x^\alpha$. f ist monoton auf $[a,b] \Longrightarrow f \in R([a,b])$. Sei $F(x) = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ (Für F gilt $F' = f$). Nach obigem Satz gilt damit:
$$\int_a^b x^\alpha dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

- Sei $0 < a < b$ und $f(x) = \frac{1}{x}$. f ist fallend auf $[a,b]$. Sei $F(x) = \log x$. ($\Longrightarrow F' = f$). Nach obigem Satz gilt damit:
$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \log b - \log a = \log\frac{a}{b}$$

- Sei $f(x) = \cos x$ $(x \in [0, \frac{\pi}{2}])$. cos auf dem Definitionsbereich fallend, also gilt $f \in R([0, \frac{\pi}{2}])$. Sei $F(x) = \sin x$ $(\Longrightarrow F' = f)$. Nach obigem Satz gilt damit:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$$

Satz 72 Sei (f_n) eine Funktionenfolge in $R([a,b])$. Die Folge (f_n) (bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$) konvergiere gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (bzw. $s : [a,b] \to \mathbb{R}$). Dann gilt: $f \in R([a,b])$ (bzw. $s \in [a,b]$) und

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx &= \int_a^b f(x)dx \\ \text{(bzw. } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx \right) &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx) \end{aligned}$$

28 Weiteres zum Integral

Satz 73 Sei $f \in R([a,b])$, $D := f([a,b])$ und $h : D \to \mathbb{R}$ sei LIPSCHITZ-stetig auf D. Dann gilt $f \circ h \in R([a,b])$

Satz 74 Seien $f, g \in R([a,b])$. Dann gilt

1. $|f| \in R([a,b])$ und die *Dreiecksungleichung*für Integrale:
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$
2. $f \cdot g \in R([a,b])$
3. Gibt es ein $\delta > 0$ mit $|g(x)| \ge \delta$ $(x \in [a,b])$, so ist $\frac{f}{g} \in R([a,b])$.

29 Stetige Funktionen und Mittelwertsätze

Satz 75 $C([a,b]) \subseteq R([a,b])$

Satz 76 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $c \in (a,b)$. Dann gilt:
$$f \in R([a,b]) \quad \Longleftrightarrow \quad f \in R([a,c]) \quad \wedge \quad f \in R([c,b]).$$
In diesem Fall gilt:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Satz 77 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt, $M := \{x \in [a,b] : f \text{ ist unstetig in } x\}$. Ist M endlich, so gilt $f \in R([a,b])$.

Satz 78 $f, g \in R([a,b])$, $g \geq 0$ auf $[a,b]$. $m := \inf f([a,b])$, $M := \sup f([a,b])$. Dann gilt:

1. (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

$$\exists \quad \mu \in [m, M] : \qquad \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

   Ist $f \in C([a,b])$ so gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$.

2. (Erweiterter Mittelwertsatz):

$$\exists \quad \mu \in [m, M] : \qquad \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

   Ist $f \in C([a,b])$ so gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$.

30 Der RIEMANN-sche Zugang zum Integral

Def. 48 Sei $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. $\xi := (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ heißt zu Z passender *Zwischenvektor*, wenn gilt

$$a = x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < \cdots < x_{n-1} < \xi_n < x_n = b$$

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $Z := \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi := \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ein zu Z passender Zwischenvektor, dann heißt

$$\sigma_f(Z, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

die RIEMANN-sche *Zwischensumme* von f bezüglich Z und ξ.

Satz 79 $f \in R([a,b]) \iff$ Es gibt ein $s \in \mathbb{R}$, so daß es für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a,b]$ gibt, so daß für jeden zu Z passenden Zwischenvektor ξ gilt $|\sigma_f(Z,\xi) - s| < \varepsilon$. In diesem Fall gilt $\int_a^b f(x)dx = s$.

31 Der zweite Hauptsatz

Def. 49 Sei $f \in R([a,b])$, $c \in [a,b]$ Dann gelte:

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx, \qquad \int_c^c f(x)dx := 0$$

Bem. Jedes $f \in C([a,b])$ besitzt auf $[a,b]$ eine Stammfunktion.

Satz 80 (zweiter Hauptsatz) Es sei $f \in R([a,b])$ und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Dann gilt:

1. F ist LIPSCHITZ-stetig auf $[a,b]$
2. Ist f in $x_0 \in [a,b]$ stetig, so ist F in x_0 differenzierbar und es gilt
$$F'(x_0) = f(x_0).$$
3. Ist $f \in C([a,b])$, so ist $F \in C^1([a,b])$ und $F' = f$ auf $[a,b]$.

32 Integrationsregeln

Satz 81 $I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein beliebiges Intervall und $f \in C(I)$. Ist $\xi \in I$ fest und $F : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_\xi^x f(t)dt$$

so gilt $F' = f$ auf I

Die Schreibweise $\int f(x)dx$ steht für irgendeine Stammfunktion von f und heißt *unbestimmtes Integral.*

Satz 82 (Partielle Integration)

1. $f, g \in R([a,b])$, F, G seien Stammfunktionen von f bzw. g. Dann gilt:
$$\int_a^b F(x)g(x)dx = \Big[F(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx$$
2. Aus $f, g \in C^1([a,b])$ folgt
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$
3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ beliebiges Intervall, $f, g \in C^1(I)$. Dann gilt:
$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Bsp.

- $\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x$
- $\int x e^x dx = x e^x - \int 1 e^x dx = x e^x - e^x$
- $$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \underbrace{\sin x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin x}_{g} dx \\ &= -\cos x \sin x - \int (-\cos^2 x) dx \\ &= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x dx \\ \Longrightarrow \quad \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}(-\cos x \sin x + x) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \int_0^1 x \arctan x dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Def. 50 Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$. Dann sei

$$\langle \alpha, \beta \rangle := [\min\{\alpha, \beta\}, \max\{\alpha, \beta\}]$$

Satz 83 (Substitutionsregel)

1. $f \in R(\langle a, b \rangle)$ und besitze auf $\langle a, b \rangle$ eine Stammfunktion F. $g : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar, $g(\langle \alpha, \beta \rangle) = \langle a, b \rangle$, $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$. Ist $(f \circ g) \cdot g'$ über $\langle \alpha, \beta \rangle$ integrierbar, so gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t) dt$$

2. Ist $f \in C(\langle a, b \rangle)$, $g \in C^1(\langle \alpha, \beta \rangle)$, $g(\langle \alpha, \beta \rangle) \subseteq \langle \alpha, \beta \rangle$, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t) dt$$

3. I, J seien Intervalle, $f \in C(I)$, $g \in C^1(J)$, $g(J) \subseteq I$. Dann gilt:

   (a) $\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right)\big|_{x=g(t)}$ auf J.

   (b) Ist g zusätzlich streng monoton, so gilt:

   $$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

   wobei $g^{-1} : g(J) \to J$ die Umkehrfunktion von g ist.

Bsp.

-
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \overset{\substack{x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t\,dt$$
$$= \Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

- Auf $(1, \infty)$ gilt
$$\int \frac{1}{x\log x}dx \overset{\substack{x=e^t\\ dx=e^t dt}}{=} \int \frac{e^t}{te^t}dt\Big|_{t=\log x} = \log t|_{t=\log x} = \log(\log x)$$

-
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \overset{\substack{x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$
$$\overset{\cos 2t = 2\cos^2 t - 1}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2}dt = \left[\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

33 Verschiedenes

Def. 51 Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dann heißt

$$|Z| := \max\{|I_j| : \quad j = 1, \ldots, n\}$$

Feinheitsmaß von Z.

Satz 84 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt mit M als oberer Schranke. Z, $\tilde{Z}$ seien Zerlegungen von $[a, b]$ mit $Z \subseteq \tilde{Z}$ und $\tilde{Z}$ enthalte genau p Teilpunkte mehr als Z. Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{s}_f(\tilde{Z}) &\leq \underline{s}_f(Z) + 2pM|Z| \\ \overline{s}_f(Z) &\leq \overline{s}_f(\tilde{Z}) + 2pM|Z| \end{aligned}$$

Satz 85 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch M beschränkt, (Z_n) eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $|Z_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Weiter sei zu jedem Z_n ein passender Zwischenvektor ξ_n gewählt. Dann gilt:

1. $\underline{s}_f(Z_n) \xrightarrow{n\to\infty} \underline{\int_a^b} f(x)dx$

2. $\overline{s}_f(Z_n) \xrightarrow{n\to\infty} \overline{\int_a^b} f(x)dx$

3. Ist $f \in R([a,b])$, so gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx$

Satz 86 (f_n) sei eine Folge in $C^1([a,b])$ mit $(f_n(a))$ konvergent und (f_n') konvergiere gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt: (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ und für die Grenzfunktion $f : f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in [a,b])$ gilt $f \in C^1([a,b])$ und $f' = g$ auf $[a,b]$.

Satz 87 (Satz von Taylor mit Integralrestglied) Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C^{(n+1)}(I)$, $a, b \in I$, $a < b$. Dann gilt:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$$

34 Uneigentliche Integrale

In diesem Kapitel seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Def. 52 $f : \begin{smallmatrix}[a,\beta)\\(\alpha,b]\end{smallmatrix} \to \mathbb{R}$ sei integrierbar über jedes Intervall $\begin{smallmatrix}[a,t]\\[t,b]\end{smallmatrix}$ für $\begin{smallmatrix}t\in(a,\beta)\\t\in(\alpha,b)\end{smallmatrix}$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{t\to\beta} \int_a^t f(x)dx \quad \in \mathbb{R} \qquad (\text{bzw.} \lim_{t\to\alpha} \int_t^b f(x)dx \quad \in \mathbb{R}),$$

so heißt f *uneigentlich integrierbar* über $\begin{smallmatrix}[a,\beta)\\(\alpha,b]\end{smallmatrix}$ und das Integral

$$\begin{aligned} \int_a^\beta f(x)dx &:= \lim_{t\to\beta} \int_a^t f(x)dx \\ \int_\alpha^b f(x)dx &:= \lim_{t\to\alpha} \int_t^b f(x)dx \end{aligned}$$

heißt *konvergent*. Andernfalls heißen diese Integrale *divergent*.

Bsp.

- $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{t\to 1}\int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{t\to 1}\arcsin t = \frac{\pi}{2}$
- $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t \frac{1}{1+x^2}dx = \lim\limits_{t\to\infty}\arctan t = \frac{\pi}{2}$
- Sei $\alpha > 0$. Dann gilt

$$\int\limits_1^t \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} \log t & \alpha = 1 \\ \frac{1}{1+\alpha}(t^{1-\alpha}-1) & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Damit gilt:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx \text{ konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1$$

- Analog:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \text{ konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha < 1$$

- $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim\limits_{t\to -\infty}\int\limits_t^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim\limits_{t\to -\infty}\arctan t = \frac{\pi}{2}$

Def. 53 $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ heißt *uneigentlich integrierbar* über (α,β), wenn gilt:

$$\exists \quad c\in(\alpha,\beta): \qquad \int\limits_\alpha^c f(x)dx \text{ konv. und } \int\limits_c^\beta f(x)dx \text{ konv.}$$

In diesem Fall sei

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx := \int\limits_\alpha^c f(x)dx + \int\limits_c^\beta f(x)dx$$

Bsp.

- $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$, denn

$$\int\limits_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} = \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$$

- $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2} dx$ ist divergent, denn

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2} dx \text{ ist divergent.}$$

Satz 88 (Cauchy-Kriterium)

$$\int\limits_a^\beta f(x)dx \text{ konv.} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\; c \in (a, \beta) \;\forall\; u, v \in (c, \beta) : \quad \left| \int\limits_u^v f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Def. 54 $\int\limits_a^\beta f(x)dx$ heißt *absolut konvergent* $:\iff \int\limits_a^\beta |f(x)|dx$ konvergiert

Satz 89 Ist $\int\limits_a^\beta f(x)dx$ abolut konvergent, so ist $\int\limits_a^\beta f(x)dx$ konvergent und es gilt:

$$\left| \int\limits_a^\beta f(x)dx \right| \leq \int\limits_a^\beta |f(x)|dx$$

Satz 90

1. (Majorantenkriterium) Es gelte $|f(x)| \leq g(x)$ $(x \in [a, \beta])$ und $\int\limits_a^\beta g(x)dx$ sei konvergent. Dann konvergiert $\int\limits_a^\beta f(x)dx$ absolut.

2. (Minorantenkriterium) Es gelte $f(x) \geq g(x) \geq 0$ $(x \in [a, \beta])$ und $\int\limits_a^\beta g(x)dx$ sei divergent. Dann divergiert auch $\int\limits_a^\beta f(x)dx$.

Bsp.

- Sei $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}$. Es gilt

$$|f(x)| = f(x) \leq \frac{x}{x^2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} \qquad (x \geq 1)$$

  Wegen $\frac{3}{2} > 1$ ist $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ konvergent. Damit konvergiert auch

$$\int\limits_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} dx$$

- Betrachte

$$\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{x^2+7x+1}}_{=:f(x)} dx$$

Sei $h(x) := \frac{1}{x}$. Es gilt

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^2}{x^2+7x+1} \xrightarrow{x\to\infty} 1.$$

$$\Longrightarrow \quad \exists \quad c \geq 1 \quad \forall \quad x \geq c: \qquad \frac{f(x)}{h(x)} \geq \frac{1}{2}.$$

$$\Longrightarrow \quad \forall \quad x \geq c: \qquad f(x) \geq \frac{1}{2x} =: g(x)$$

Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{1}{2x} dx \quad \text{ist divergent}$$

Damit ist auch $\int_0^\infty f(x)dx$ divergent.

Bem. Sei W die Menge aller über $[a, \beta)$ uneigentlich integrierbaren Funktionen. Dann ist W ein reeller Vektorraum und die Abbildung

$$\Phi : W \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(f) = \int_a^\beta f(x)dx$$

ist linear. Aus $f, g \in W$ folgt im allgemeinen nicht $f \cdot g \in W$. Ferner gilt $R([a, \beta]) \subseteq W$.

35 Funktionen von beschränkter Variation

Def. 55 Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ sei Zerlegung von $[a, b]$, dann heißt

$$V_f(Z) := \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

die *Variation* von f bezüglich Z.

Def. 56 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt von *beschränkter Variation*, wenn gilt:

$$\exists \quad M > 0 \quad \forall \quad \text{Zerl } Z \text{ von } [a, b]: \qquad V_f(Z) \leq M$$

In diesem Fall heißt die Zahl

$$V_f([a, b]) := \sup\{V_f(Z) : Z \text{ Zerl. von } [a, b]\}$$

die *Totalvariation* von f. $BV([a, b])$ bezeichnet die Menge aller Funktionen von beschränkter Variation auf $[a, b]$.

Bsp.

- Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

  Es gilt $f \in C([0,1])$. Wähle

$$Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \ldots, \frac{1}{n-(n-1)}\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  Dann gilt $V_f(Z_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Also ist f nicht von beschränkter Variation.

- Sei $f \in C^1([a,b])$. Dann gilt:

$$\exists \quad c \geq 0 \quad \forall \quad x \in [a,b] : \qquad |f'(x)| \leq c$$

  Für jede Zerlegung $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ mit

$$\begin{aligned} V_f(Z) &= \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n} |f'(\xi_j)| \cdot |x_j - x_{j-1}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} c \cdot (x_j - x_{j-1}) = c(b-a) \end{aligned}$$

  Also ist f von beschränkter Variation und es gilt $V_f([a,b]) \leq c(b-a)$.

Satz 91 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktion. Dann gilt

1. Ist $c \in (a,b)$, so gilt:

$$f \in BV([a,b]) \quad \Longleftrightarrow \quad f \in BV([a,c]) \cap BV([c,b])$$

   In diesem Fall gilt

$$V_f([a,b]) = V_f([a,c]) + V_f([c,b])$$

2. $f \in BV([a,b]) \Longrightarrow f$ ist beschränkt auf $[a,b]$
3. f monoton $\Longrightarrow f \in BV([a,b])$
4. f Lipschitz-stetig auf $[a,b] \Longrightarrow f \in BV([a,b])$
5. $C^1([a,b]) \subseteq BV([a,b])$
6. $BV([a,b])$ ist ein reeller Vektorraum.

Satz 92 $f \in BV([a,b]) \Longleftrightarrow$ Es gibt zwei monoton wachsende Funktionen $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f = f_1 - f_2$.

Satz 93 $f \in C^1([a,b]) \Longrightarrow V_f([a,b]) = \int\limits_a^b |f'(x)|dx$

36 Das RIEMANN-STIELTJES-Integral

Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen.

Def. 57 Sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein zu Z passender Zwischenvektor.

$$\sigma_f(Z, \xi, g) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

heißt RIEMANN-STIELTJES-*Summe*.f heißt (RIEMANN-STIELTJES-) *integrierbar* bezüglich g, wenn gilt:

$$\begin{array}{l} \exists \quad s \in \mathbb{R} \quad \forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \forall \quad \text{Zerl. } Z \text{ von } [a,b] \text{ mit } |Z| < \delta \\ \forall \quad \text{Zw.-Vekt. } \xi \text{ passend zu } Z: \qquad |\sigma_f(Z, \xi, g) - s| < \varepsilon \end{array}$$

Dieses s ist eindeutig bestimmt und man definiert

$$\int_a^b f(x)dg(x) := s$$

Es sei $R_g([a,b])$ die Menge aller bezüglich g über $[a,b]$ integrierbaren Funktionen.

Bem.

- Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Dann ist $\sigma_f(Z, \xi, g) = \sigma_f(Z, \xi)$ und es gilt $R_g([a,b]) = R([a,b])$
- Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ konstant ($g = c$) auf $[a,b]$. Dann gilt

$$R_g([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \; f \text{ beschränkt}\}$$

.

Satz 94 $f \in R_g([a,b]) \iff$ Für jede Folge (Z_n) von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $|Z_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und jede Folge $(\xi^{(n)})$ mit $\xi^{(n)}$ passend zu Z_n gilt: $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g)$ konvergiert und

$$\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dg(x) \qquad (n \to \infty).$$

Satz 95 $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien beschränkt. Dann gilt:

1. $R_g([a,b])$ ist ein reeller Vektorraum und die Abbildung $\Phi : R_g([a,b]) \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(f) = \int_a^b f(x)dg(x)$ ist linear.
2. $f \in R_{g_1}([a,b]) \cap R_{g_2}([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\Longrightarrow f \in R_{\alpha g_1 + \beta g_2}([a,b])$ und

$$\int_a^b f(x)d(\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)) = \alpha \int_a^b f(x)dg_1(x) + \beta \int_a^b f(x)dg_2(x)$$

3. Ist $a < c < b$ und gilt
$$f \in R_g([a,b]) \cap R_g([a,c]) \cap R_g([c,b])$$
so gilt
$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x)$$

Bem. Ist $f \in R_g([a,c]) \cap R_g([c,b])$, so folgt im allgemeinen nicht $f \in R_g([a,b])$.

Satz 96 (Partielle Integration) $f \in R_g([a,b]) \Longrightarrow g \in R_f([a,b])$ und es gilt:
$$\int_a^b f(x)dg(x) = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)df(x)$$

Satz 97 $f \in C([a,b])$, $g \in BV([a,b]) \Longrightarrow f \in R_g([a,b])$.

Satz 98 $f \in C([a,b]), g \in C^1([a,b]) \Longrightarrow f \in R_g([a,b])$ und es gilt:
$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Bsp.

- $\displaystyle\int_1^2 xd(\log x) = [x\log x]_1^2 - \int_1^2 \log x dx = 2\log 2 - [x\log x - x]_1^2 = 1$
  oder:
  $\displaystyle\int_1^2 xd(\log x) = \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}dx = 2 - 1 = 1.$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 d|x| = [x^2|x|]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 |x|dx^2 = -\int_{-1}^1 |x|dx^2 = -\int_{-1}^1 2x|x|dx = 0$

Satz 99 Ist $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ wachsend, so gilt für $f_1, f_2 \in R_g([a,b])$ mit $f_1 \leq f_2$ auf $[a,b]$:
$$\int_a^b f_1(x)dg(x) \leq \int_a^b f_2(x)dg(x)$$

Satz 100 Es sei $f \in C([a,b])$ und $g \in BV([a,b])$. die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch
$$F(x) = \int_a^x f(t)dg(t)$$

Dann gilt:

1. $F \in BV([a,b])$

2. Ist g in $x_0 \in [a,b]$ stetig, so ist F in x_0 stetig.

Bem. Ist $f \in C([a,b]), g \in C^1([a,b])$, so gilt:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dg(t) = \int_a^x f(t)g'(t)dt$$

Damit ist $F \in C^1([a,b])$ und $F' = fg'$ auf $[a,b]$ (2. Hauptsatz)

Index