

Mathematik und Logik (2011W)

6. Übungsaufgaben

bis 2012-01-19

1. Beweisen Sie, daß die Summe der ersten n ungeraden Zahlen immer n^2 ist.
2. Bestimmen Sie eine disjunktive und eine konjunktive Normalform von

$$(C \vee \neg D) \wedge (\neg C \vee (A \iff B)).$$

Ist diese allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar?

3. Bestimmen Sie Normalformen von $((A \implies B) \implies A) \implies A$.
4. Wir verwenden klassische Logik und sollten eine Aussage A beweisen. Warum darf man dabei jederzeit annehmen, daß aus A eine beliebige Aussage folgt?
5. Finden Sie einen exakten Induktionsbeweis für den Satz, daß sich jede natürliche Zahl als Produkt von Primzahlen darstellen läßt.
6. Von einer Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ kennen wir die beiden folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}f(0, m) &= m \\f(Sn, m) &= S(f(n, m))\end{aligned}$$

Beweisen Sie daraus, daß diese Funktion auch die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned}f(n, 0) &= n \\f(n, Sm) &= S(f(n, m)) \\f(n, m) &= f(m, n) \\f(n, f(m, k)) &= f(f(n, m), k)\end{aligned}$$

7. Finden Sie eine möglichst schwache Aussage A , sodaß gilt:

$$\forall_{x \in X} A \implies P(x)$$

8. In welchem Sinne und warum definiert Teilbarkeit eine wohlfundierte Relation in den ganzen Zahlen?
9. Finden Sie irgendeine wohlfundierte Relation in den rationalen Zahlen.

10. Welche Art von Induktion haben wir im Beweis des erweiterten Euklidischen Algorithmus verwendet?
11. Ein Heizexperte gibt uns folgende Auskünfte:
- (a) Es gibt nur dann Feuer, wenn Luft, brennbares Material und die kritische Temperatur erreicht ist.
 - (b) Wenn der Ofen stark raucht, ist kein Abzug durch den Kamin möglich.
 - (c) Öffnen des Ventils für die Wasserzufuhr hat zur Folge, daß der Ofen unter die kritische Temperatur abkühlt.
 - (d) Wenn Feuer im Ofen ist und die Luftzufuhr unterbunden wird, dann gibt es keine Luft mehr im Ofen.
 - (e) Der Ofen raucht nur dann, wenn er Feuer hat.

Stellen Sie dieses Wissen mit Hornklausen dar. Versuchen Sie dann zu beweisen, daß starke Rauchentwicklung durch Öffnen des Ventils für die Wasserzufuhr oder durch Unterbinden der Luftzufuhr verhindert werden kann.