Mathematik und Logik (2011W)

5. Übungsaufgaben

bis 2011-12-15

1. Beweisen Sie ein paar triviale Sätze über die Disjunktion:

   (a) $A \implies A \vee B$;

   (b) $A \wedge B \implies A \vee B$;

   (c) $A \vee B \iff B \vee A$;

   (d) $A \iff A \vee A$;

   (e) $A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$.

2. Wir definieren eine Menge Z durch die Regeln.

$$\frac{a \in \mathbb{N} \qquad b \in \mathbb{N}}{a - b \in Z} Z\mathcal{I} \qquad\qquad \frac{\underset{a \in \mathbb{N}}{\forall}\ \underset{b \in \mathbb{N}}{\forall}\ P(a-b)}{\underset{z \in Z}{\forall}\ P(z)} Z\mathcal{E}$$

Dabei sei P eine beliebige Eigenschaft.

Z besteht somit aus Paaren natürlicher Zahlen. Allerdings verwenden wir statt (a, b) die Notation $a-b$, um anzuzeigen, daß damit nicht ein Element von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sondern ein Element von Z konstruiert werden soll (darüberhinaus hat das Minuszeichen keine Bedeutung, es ist einfach ein Konstruktor, d.h. insbesondere, daß *nicht* die Differenz von a und b gebildet wird). Es sollte aber noch einen wichtigen Unterschied zur Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ geben: Wir betrachten $a - b$ und $c - d$ nicht nur dann als gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ ist, sondern es sollte für jedes $x \in \mathbb{N}$ auch $a-b = (a+x)-(b+x)$ sein. Es läßt sich zeigen, daß dann

$$a - b = c - d \iff a + d = b + c.$$

(Können Sie dies auch beweisen?) Beachten Sie hier insbesonere, daß das Gleichheitszeichen links die Gleichheit von Elementen von Z betrifft, während rechts die Gleichheit natürlicher Zahlen gemeint ist.

Wir definieren nun eine Addition für Elemente von Z:

$$(a - b) + (c - d) := (a + c) - (b + c).$$

Beachten Sie dabei besonders, daß die Minus- und Pluszeichen auf den beiden Seiten verschiedene Bedeutungen haben. (Welche genau?)

Diese Addition in Z wurde abhängig von der Darstellung definiert. Zeigen Sie, daß sie trotzdem wohldefiniert ist, d.h.

$$\underset{y,z\epsilon Z}{\forall}\ \underset{y',z'\epsilon Z}{\forall} y = y' \ \wedge\ z = z' \Rightarrow y + z = y' + z'$$

Überlegen Sie sich, was eigentlich diese hier definierte Menge Z mit der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen zu tun hat.

3. Für jedes $x \ \epsilon\ X$ sei $P(x)$ eine Aussage. Zeigen Sie, daß es eine Aussage E gibt, sodaß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\underset{x\epsilon X}{\forall} P(x) \Rightarrow E$$

$$\underset{F\epsilon \mathbb{P}}{\forall} \left(\underset{x\epsilon X}{\forall} P(x) \Rightarrow F \right) \Rightarrow (E \Rightarrow F)$$

Hinweis: E wie Existenzaussage...

4. Bekanntlich gilt $(A \ \wedge\ B) \ \wedge\ C \Leftrightarrow A \ \wedge\ (B \ \wedge\ C)$ (für logische Aussagen). Definieren Sie daher für beliebige Mengen A, B, C, eine Funktion

$$f : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$$

und auch eine Funktion für die Umkehrung, also

$$g : A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$$

Wie verhalten sich f und g zueinander? Überlegen Sie sich, inwieweit es sinnvoll sein könnte, die Mengen $A \times (B \times C)$ und $(A \times B) \times C$ als gleich zu betrachten.

5. Beim einem sehr gut besuchten Tanzkurs gibt es eine Menge M von Männern und eine Menge F von Frauen. Wie läßt sich am einfachsten feststellen, ob M und F gleichviele Elemente enthalten?

6. $\mathbb{P}$ bezeichne die Menge aller Aussagen. Zeigen Sie:

$$\underset{A\epsilon \mathbb{P}}{\forall} (\neg\neg\neg A \implies \neg A).$$

7. Zeigen Sie

$$\underset{A\epsilon \mathbb{P}}{\forall} (A \ \vee\ \neg A) \iff \underset{A\epsilon \mathbb{P}}{\forall} (\neg\neg A \implies A).$$

8. Können Sie die Allgemeingültigkeit der Formel

$$((P \implies Q) \implies P) \implies P$$

nachweisen?

Vereinfacht sich die Angelegenheit, wenn Sie

$$\underset{A\epsilon \mathbb{P}}{\forall} (A \ \vee\ \neg A)$$

verwenden?