Mathematik und Logik (2011W)

2. Übungsaufgaben

bis 2011-11-10

1. Der Boden eines 935cm langen und 357cm breiten Raumes sollte mit quadratischen Fliesen vollständig verfliest werden. Die Verfliesung sollte fugenfrei sein, und es dürfen nur ganze Fliesen verwendet werden. Es sollte bestimmt werden, wie groß die Fliesen sein müssen (oder können), und wieviele davon zu verwenden sind.

   Versuchen Sie, diese Situation durch ein mathematisches Problem zu beschreiben, und dann auch zu lösen.

2. Sie kaufen ein gutes Mathematik-Buch zum Preis 74 Euro, haben aber nur 38-Euro-Scheine eingesteckt (vermutlich aus einer fehlerhaften Falschgeldproduktion), während der Buchhändler nur mit 50-Euro-Scheinen herausgeben kann. Wie ist die Zahlung möglich?

   Hinweis: Es ist vor allem wichtig, daß Sie die passende Gleichung aufschreiben. Testen Sie, ob sie lösbar ist. Die Lösung selbst kann zwar auch durch etwas Probieren gefunden werden, sie sollten Sie aber auch durch Rechnen finden.

   Was würde sich ändern, wenn das Buch um einen Euro billiger wäre?

3. Beweisen Sie, daß die Differenz zweier Lösungen einer Gleichung der Form $x \cdot m + y \cdot n = c$ stets eine Lösung von $x \cdot m + y \cdot n = 0$ ist, und daß umgekehrt die Addition einer Lösung letzterer Gleichung wieder eine Lösung ersterer ergibt.

   Testen Sie beide Richtungen mit konkreten Beispielen.

4. Wie würden Sie einen sinnvollen Teilbarkeitsbegriff für rationale Zahlen definieren?

5. Überlegen Sie sich, warum eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist. Entwickeln Sie ähnliche Tests für 9, 11, 5, 2, 10, 4, 7.

6. Bestimmen Sie den Rest von 17, 345 und 234582930937420981 bei Division durch 7. Dazu ist kein Taschenrechner erforderlich.

7. Testen Sie (mit dem in der Vorlesung vorgestellten probabilistischen Verfahren) für verschiedene Zahlen, ob sie prim sind, unter anderem: 15, 341, 2701. Testen Sie mit mehreren Basen, insbesondere bei 15 auch mit 11.

8. Sei $m = 29 \cdot 37$. Bestimmen Sie $\varphi(m)$ und das kleinste $e \geq 3$, welches modulo $\varphi(m)$ invertierbar ist.

9. Wählen Sie ein paar Zahlen $a < m$ und berechnen Sie $b := a^e \pmod{m}$.
10. Bestimmen Sie das Inverse d zu e (modulo $\varphi(m)$).
11. Berechnen Sie $b^d \pmod{m}$.
12. Berechnen Sie a^e modulo 29 und auch modulo 37 (möglichst mit a und e aus den obigen Beispielen). Bestimmen Sie daraus a^e modulo $29 \cdot 37$.
13. Die logische Äquivalenz erfüllt bekanntlich die drei Axiome für eine Äquivalenzrelation:

    (a) $P \iff P$;

    (b) $(P \iff Q) \implies (Q \iff P)$;

    (c) $(P \iff Q) \implies (Q \iff R) \implies (P \iff R)$.

    Konstuieren Sie für jede dieser Aussagen passende Beweise.
14. So wie z.B. die Kongruenz modulo m mit den Rechenooperationen Addition und Multiplikation verträglich ist, so ist auch die logische Äquivalenz mit den logischen Operationen Konjunktion und Implikation verträglich. Formulieren Sie diesen Sachverhalt genau und konstuieren Sie die Beweise (so wie im vorigen Beispiel).
15. Rechnen Sie nach, daß die Kongruenz modulo m tatsächlich eine Äquivalenzrelation und mit Addition, Subtraktion und Multiplikation verträglich ist.
16. Finden Sie ein Beispiel, welches zeigt, daß die Division nicht mit der Kongruenz verträglich ist, auch wenn sich die auftretenden Divisionen „ausgehen“.
17. Berechnen Sie von $1, 2, 3, \ldots, 12$ die Inversen modulo 11 und module 12.
18. Lösen Sie die Gleichung $5 \cdot x \equiv_{11} 2$. Warum ist sie lösbar? Gibt es mehrere Lösungen?
19. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$5x + 3y \equiv_{11} 7,$$
$$4x - 2y \equiv_{11} 8$$

20. Bestimmen Sie, wieviele Zahlen zwischen 0 und m modulo m invertierbar sind. Dabei sei $m = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 4, 9, 25, 49, 6, 10, 14, 22, 15, 21$.
21. Welche der beiden folgenden aussagenlogischen Formeln (Assoziativgesetz für die logische Implikation) können Sie beweisen?

$$\big((A \Rightarrow B) \Rightarrow C\big) \implies \big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big)$$
$$\big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big) \implies \big((A \Rightarrow B) \Rightarrow C\big)$$

    Für diejenige, die Sie nicht beweisen können, suchen Sie konkrete Aussagen A, B, C, für die sie trotzdem zutrifft, und auch Aussagen A', B', C', für die sie nicht zutrifft.

22. Beweisen Sie

    (a) $(A \wedge B \Rightarrow C) \iff (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$;

    (b) $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \iff (B \Rightarrow A \Rightarrow C)$.

23. Beweisen Sie

$$(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \implies (A \wedge C \Rightarrow B \wedge D).$$

    Können Sie auch die Umkehrung beweisen? Wenn nicht, suchen Sie auch hier nach konkreten Aussagen, für welche sie zutrifft bzw. nicht zutrifft.