

Mathematik und Logik

4. Übungsaufgaben

2009-11-10

Für eine kurze Präsentation in der nächsten (oder auch übernächsten Übungsstunde sind die folgenden Beispiele geeignet (falls vollständig gelöst): 1, 2, 3, 5. (Bitte im KUSSS-Forum Ihr Interesse bekunden!)

Beispiel 4 besteht aus Routineaufgaben, Beispiel 6 erfordert keine konkrete Lösung, Sie sollten sich aber darüber ernsthaft Gedanken machen.

1. Welche der beiden folgenden aussagenlogischen Formeln (Assoziativgesetz für die logische Implikation) können Sie beweisen?

$$\begin{aligned}((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) &\Longrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \\(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) &\Longrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)\end{aligned}$$

Für diejenige, die Sie nicht beweisen können, suchen Sie konkrete Aussagen A, B, C , für die sie trotzdem zutrifft, und auch Aussagen A', B', C' , für die sie nicht zutrifft.

2. Beweisen Sie

- (a) $(A \wedge B \Rightarrow C) \iff (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$;
- (b) $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \iff (B \Rightarrow A \Rightarrow C)$.

Welche Funktionen entsprechen diesen Beweisen?

3. Beweisen Sie

$$(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D) \Longrightarrow (A \wedge C \Rightarrow B \wedge D).$$

Können Sie auch die Umkehrung beweisen? Wenn nicht, suchen Sie auch hier nach konkreten Aussagen, für welche sie zutrifft bzw. nicht zutrifft.

4. Beweisen Sie ein paar triviale Sätze über die Disjunktion:

- (a) $A \Longrightarrow A \vee B$;
- (b) $A \wedge B \Longrightarrow A \vee B$;
- (c) $A \vee B \iff B \vee A$;
- (d) $A \iff A \vee A$;
- (e) $A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$.

Hinweis: Ist eine Disjunktion der Form $P \vee Q$ zu beweisen, können Sie sich aussuchen, ob Sie P oder Q beweisen möchten (Introduktionsregel für die Disjunktion). Ist dagegen irgendeine Aussage R zu beweisen, aber eine Aussage der Form $P \vee Q$ in den aktuellen Annahmen, dann können Sie eine Fallunterscheidung durchführen: Nehmen Sie im ersten Fall P zusätzlich an und beweisen Sie damit R . Entsprechend nehmen Sie im zweiten Fall Q an und versuchen ebenfalls, R zu beweisen. Gelingen die Beweise in beiden Fällen, dann ist R bewiesen (Eliminationsregel für die Disjunktion).

5. Beweisen Sie

$$(A \implies B) \vee (C \implies D) \implies (A \vee C \implies B \vee D).$$

6. Mit \perp bezeichnen wir die Aussage "Jede Aussage ist wahr"; und P sei irgendeine Aussage. Was halten Sie dann von den Aussagen $\perp \implies P$ und $P \implies \perp$?